

Вписанные углы

На окружности ω с центром O отмечены точки A, B . Мерой дуги AB назовём величину центрального угла AOB (центральный угол может быть больше 180° ; вся дуга должна быть внутри центрального угла). Для произвольной точки C на окружности вне дуги AB угол ACB называется *вписанным углом*, опирающимся на AB .

Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

Под «меньшей» дугой AB понимается та из двух дуг AB , которая не содержит других отмеченных точек, вторая дуга AB называется «большей».

1. Докажите, что внутренняя и внешняя биссектрисы угла A треугольника ABC пересекают его описанную окружность в серединах меньшей и большей дуг BC соответственно.
2. (а) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S . Докажите, что мера угла ASB равна полусумме мер меньших дуг AB и CD .
(б) В этих же обозначениях лучи AB и DC пересекаются в точке P . Докажите, что мера угла APD равна полуразности мер меньших дуг AD и BC .
(в) Докажите, что в обозначениях пункта (а) хорды AB и CD параллельны тогда и только тогда, когда меньшие дуги AD и BC равны.
3. На окружности в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D . Пусть K, L, M, N — середины меньших дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.
4. В окружность с центром O вписан угол ABC , равный 30° . Точка K делит меньшую дугу AB в отношении $1 : 3$ (считая от точки A). Отрезок KO пересекает хорду BC в точке J . Докажите, что отрезок JC равен радиусу окружности.
5. Точки A, B, C, D, E лежат на окружности в указанном порядке. Известно, что $AC = CD$ и $ABCE$ — трапеция. Докажите, что $BCDE$ — трапеция или прямоугольник.
6. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$ без параллельных сторон. Его вершины разбивают окружность на четыре дуги. Рассматриваются восемь прямых: две прямые, соединяющие середины противоположных дуг; две биссектрисы угла между прямыми AC и BD ; две биссектрисы угла между прямыми AB и CD ; две биссектрисы угла между прямыми AD и BC . Докажите, что эти восемь прямых можно раскрасить в красный и в синий цвета так, чтобы одноцветные прямые были параллельны.
7. Существует ли вписанный в окружность n -угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если:
(а) $n = 19$;
(б) $n = 20$?