Алгебраический разнобой

1. Рациональные числа a и b удовлетворяют равенству
$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0.$$
Докажите, что $1 - ab$ — квадрат рационального числа.

2. Дано натуральное $n > 1$. Для каждого делителя d числа $n + 1$ Петя разделил число n на d с остатком и записал на доску неполное частное, а в тетрадь — остаток. Докажите, что наборы чисел на доске и в тетради совпадают.

3. Докажите, что для любого простого числа p найдется число вида $2023^n - n$, делящееся на p.

4. Найдите все тройки простых чисел p, q, r такие, что четвёртая степень любого из них, уменьшенная на 1, делится на произведение двух остальных.

5. Докажите, что существует бесконечно много таких пар различных натуральных чисел $k, n > 1$, что $(k! + 1, n! + 1) > 1$.

6. Числа a, b, c являются длинами сторон треугольника. Докажите, что
$$\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ac}{a^2 + c^2} + \frac{c^2 + 2ab}{b^2 + a^2} > 3.$$

7. Попарно различные натуральные числа a, b, c таковы, что $b + c + bc$ делится на a, $a + c + ac$ делится на b, $a + b + ab$ делится на c. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b, c не является простым.

8. Дано натуральное число a. Известно, что для любого натурального n у числа $n^2a - 1$ найдётся натуральный делитель $d > 1$ такой, что $d \equiv 1 \pmod{n}$. Докажите, что a — точный квадрат.