

Решётки. Формула Пика

Треугольник с вершинами в целых точках назовём *элементарным*, если внутри него и на его границе нет целых точек, кроме вершин.

Утверждение. Элементарный треугольник не может быть остроугольным.

Утверждение. Если три вершины параллелограмма лежат в целых точках, то и четвёртая вершина расположена в целой точке.

Вам может пригодиться теорема Пифагора: в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

1. Найдите все элементарные прямоугольные треугольники.

Для треугольника на плоскости назовём *скачком* следующую операцию: одна из его вершин заменяется на симметричную ей относительно другой вершины.

2. Начнём с тупоугольного элементарного треугольника и будем при каждом скачке отражать вершину острого угла относительно вершины тупого угла.

(а) Докажите, что элементарный треугольник будет переходить в элементарный.

(б) Докажите, что в конце концов получится прямоугольный треугольник.

3. **Формула Пика.** Площадь многоугольника с вершинами в целых точках равна $V + \frac{\Gamma}{2} - 1$, где V — количество точек внутри многоугольника, а Γ — на границе.

(а) Многоугольник A разбит на многоугольники B и C . Докажите, что если формула Пика верна для двух многоугольников из A , B , C , то она верна и для третьего.

(б) Докажите формулу Пика.

4. Дан выпуклый пятиугольник с вершинами в целых точках. Докажите, что его площадь хотя бы $\frac{5}{2}$.

5. На плоскости даны два элементарных треугольника. При каком условии один из них можно получить из другого при помощи скачков?

6. Дан клетчатый квадрат 10×10 . Внутри него провели 80 единичных отрезков по линиям сетки, которые разбили квадрат на 20 многоугольников равной площади. Докажите, что все эти многоугольники равны.

7. Дан многоугольник с вершинами в целых точках. Известно, что у всех его вершин одинаковая чётность суммы координат. Докажите, что у этого многоугольника целая площадь.

8. На клетчатой плоскости дан многоугольник с вершинами в вершинах клеток. Докажите, что центр какой-то клетки лежит внутри или на границе многоугольника.