Степень вхождения простого

Пусть p — простое число. Каждое целое ненулевое число n можно единственным образом представить в виде $n = p^k m$, где m не делится на p (возможно, $k = 0$). Число k называется *степенью вхождения простого* p в n. Обозначение: $k = \nu_p(n)$.

Свойства:
(а) $\nu_p(ab) = \nu_p(a) + \nu_p(b)$;
(б) $\nu_p(a \pm b) \geqslant \min\{\nu_p(a), \nu_p(b)\}$, причём если $\nu_p(a) \neq \nu_p(b)$, то достигается равенство.

1. Натуральные числа a, b, c, d таковы, что abc, abd, acd, bcd — точные квадраты. Докажите, что a, b, c, d — тоже точные квадраты.

2. Даны натуральные числа a, b, c, d, e. Докажите, что если числа ab, cd и $ac + bd$ делятся на e, то ac и bd тоже делятся на e.

3. Назовём натуральное число забавным, если все его простые делители меньше 20. Докажите, что среди любых 300 забавных чисел найдутся два таких, что их произведение — полный квадрат.

4. **(а)** **Формула Лежандра.** Докажите, что степень вхождения простого числа p в $n!$ может быть вычислена по формуле

$$\nu_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$$

(б) Докажите, что степень вхождения p в $n!$ также может быть вычислена по формуле

$$\nu_p(n!) = \frac{n - S_p(n)}{p - 1},$$

где $S_p(n)$ — сумма цифр в p-ичной записи числа n.

5. Натуральные числа a, b, $\frac{ab}{a-b}$ взаимно просты в совокупности. Докажите, что $a - b$ — точный квадрат.

6. Пусть натуральные числа a, b, c таковы, что число $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ также натуральное. Докажите, что abc — точный куб.

7. Дано 41 различное натуральное число, меньшее 1000. Известно, что среди любых трёх из них есть два, дающие в произведении точный квадрат. Докажите, что среди этих чисел есть точный квадрат.

8. Пусть p — нечётное простое число, и целые числа a и b ($a \neq b$), не кратные p, таковы, что $a - b$ делится на p. Докажите, что
(а) $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b)$, если k не кратно p;
(б) $\nu_p(a^p - b^p) = \nu_p(a - b) + 1$;
(в) $\nu_p(a^{p^m} - b^{p^m}) = \nu_p(a - b) + m$;
(г) $\nu_p(a^k - b^k) = \nu_p(a - b) + \nu_p(k)$ для произвольного натурального k.