Диагностическая работа. Очный этап. Решения

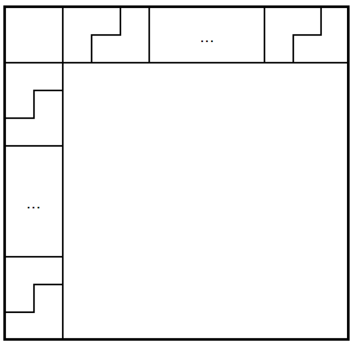
1. Клетки квадрата 20×20 раскрашены в несколько цветов. Известно, что каждая клетка граничит по стороне или углу хотя бы с двумя клетками того же цвета. В какое максимальное количество цветов может быть покрашена таблица?

Ответ: 133 цвета.

Решение. Рассмотрим клетку какого-то цвета. Она граничит хотя бы с двумя другими клетками этого цвета. Таким образом, клеток каждого цвета не меньше трёх. Тогда цветов не больше $\left[\frac{20\cdot 20}{3}\right] = 133$.

Для решения задачи достаточно разбить всю фигуру на уголки и один квадрат 2×2, каждую фигурку покрасить в свой цвет. Очевидно, что будет использовано 133 цвета.

Квадрат 2×2 вырежем из левого верхнего угла. Две полоски 2×18 разобьём на прямоугольники 2×3, каждый прямоугольник разрежем на две уголка. Оставшийся квадрат 18×18 разрежем на прямоугольники 2×3 (все прямоугольники будут горизонтальными).



2. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых

$$n^2 + 6n = m! + 15.$$

Ответ: $m = 1$, $n = 2$ или $m = 5$, $n = 9$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$(n+3)^2 = m! + 24.$$

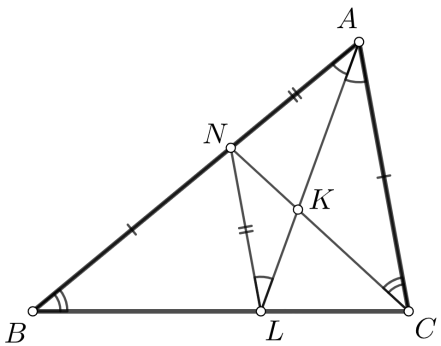
При $m \geqslant 6$ правая часть делится на 8, но не делится на 16. Но левая часть делится на чётную степень двойки, поэтому $m < 6$.

- При $m = 1$ получаем $(n+3)^2 = 25$, то есть $n = 2$.
- При $m = 2$ получаем $(n+3)^2 = 26$, то есть решений нет.
- При $m = 3$ получаем $(n+3)^2 = 30$, то есть решений нет.
- При $m = 4$ получаем $(n+3)^2 = 48$, то есть решений нет.
- При $m = 5$ получаем $(n+3)^2 = 144$, то есть $n = 9$.

3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Точка N на стороне AB такова, что $LN \parallel AC$, K — точка пересечения отрезков CN и AL. Оказалось, что $BN = AC$. Найдите длину отрезка NK, если $BL = a$, $CL = b$.

Ответ: $a - b$.

Решение. Так как $LN \parallel AC$, то $\angle ALN = \angle NAL$, то есть $AN = LN$. В треугольниках ACN и NBL равны пары сторон AC и BN, AN и NL и из параллельности равны углы CAN и BNL, то есть треугольники равны, откуда $CN = BL = a$.



Заметим, что

$$\angle CLK = \angle BAL + \angle ABL = \angle LAC + \angle ACN = \angle CKL,$$

то есть треугольник CKL равнобедренный, откуда $CK = CL = b$.

Таким образом, $NK = CN - CK = a - b$.

4. Дана 21 монета, все монеты имеют разный вес. Чудо-робот умеет выделять из любых 10 монет кучку из двух монет — самой тяжёлой и самой лёгкой среди этих 10 (но какая самая лёгкая, а какая самая тяжёлая — не показывает). Как с помощью этого робота расставить монеты в ряд так, чтобы каждая монета, находящаяся не с краю, была тяжелее одной из соседних с ней монет и легче другой?

Решение. Упорядочим веса монет: $x_1 < x_2 < \dots < x_{20} < x_{21}$. Переберём все возможные десятки монет и посчитаем, сколько раз каждая монета была выделена.

- При $i = 1, \dots, 9$ монета x_i не может быть самой тяжёлой, а самой лёгкой она будет в C_{21-i}^9 десяток.
- Монета x_{10} будет самой тяжёлой в 1 десятке, а самой лёгкой — в C_{11}^9 десятках.
- Монета x_{11} будет самой лёгкой в C_{10}^9 десятках и самой тяжёлой в C_{10}^9 десятках.
- Монета x_{12} будет самой тяжёлой в C_{11}^9 десятках, а самой лёгкой — в 1 десятке.
- При $i = 13, \dots, 21$ монета x_i будет самой тяжёлой в C_{i-1}^9 десятках, а самой она быть не может.

Заметим, что i-я монета будет выделена столько же раз, сколько и $(22 - i)$-я, то есть все монеты, кроме x_{11} разобьются на пары монет, выделенных одинаковое количество раз. Обозначим полученные 10 наборов по две монеты через $S_i = \{x_{22-i}, x_i\}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 10$ (ещё останется монета x_{11}).

Обозначим монеты, принадлежащие множеству S_i через y_i, z_i, то есть $S_i = \{y_i, z_i\}$. Рассмотрим набор монет $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{10}\}$. В нём одной из особенных монет будет монета y_1, а вторая монета может быть любой. В случае если вторая особенная монета не y_{10}, то заменим вторую особенную монету y_j на z_j. Заметим, что z_j не является особенной монетой в новой десятке $Y' = \{y_1, \dots z_j \dots y_{10}\}$. Будем повторять эту операцию, пока особенными монетами не станут монеты y_1 и y_{10}. Обозначим полученный после этих операций набор через $T = \{t_1, t_2, \dots t_{10}\}$, где $t_i \in S_i$.

Будем теперь считать, что $S_i = \{u_i, t_i\}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant 10$. Несложно видеть, что множество монет $\{t_1, t_2, \dots, t_9\}$ совпадает либо с множеством монет $\{x_1, x_2, \dots, x_9\}$, либо с множеством монет $\{x_{13}, x_{14}, \dots x_{21}\}$. Осталось лишь понять разделяется ли набор T монетой x_{11}. Заменим в наборе T монету t_1 на x_{11}. Есть два случая.

- В новом наборе t_{10} — особенная монета, тогда расставим монеты в ряд в следующем порядке : $t_1, t_2, \dots, t_9, u_{10}, x_{11}, t_{10}, u_9, \dots, u_1$.

- В новом наборе x_{11} — особенная монета, тогда расставим монеты в ряд в следующем порядке : $t_1, t_2, \dots, t_9, t_{10}, x_{11}, u_{10}, u_9, \dots, u_1$.

Несложно заметить, что полученные ряды монет удовлетворяют условию задачи, так как монеты в них упорядочены по возрастанию или убыванию веса.

5. Дано натуральное число N, не имеющее в своей десятичной записи нулей. Ваня выписал все его натуральные делители в ряд по возрастанию (их оказалось не меньше пяти):

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{k-1} < d_k = N.$$

Известно, что $3d_2 < d_4$ и что $d_{k-1} + d_{k-2} + d_{k-3} + d_{k-4} > N$. Докажите, что N делится на куб некоторого натурального числа, большего 1.

Решение. Пусть N не делится на 2, тогда

$$d_{k-1} + d_{k-2} + d_{k-3} + d_{k-4} \leqslant \frac{N}{3} + \frac{N}{5} + \frac{N}{7} + \frac{N}{9} < N,$$

противоречие. Следовательно, $d_2 = 2$ и $d_4 > 6$.

Если N делится на 3 (то есть $d_3 = 3$), то N делится и на 6, и поскольку $d_4 > 6$, получаем противоречие. Таким образом, N не делится на 3. По условию в десятичной записи числа N нет нулей, поэтому N не делится на 5. Предположим, наконец, что N не делится на 8. Тогда, оценивая сумму четырёх наибольших собственных делителей N, получаем противоречие:

$$d_{k-1} + d_{k-2} + d_{k-3} + d_{k-4} \leqslant \frac{N}{2} + \frac{N}{4} + \frac{N}{7} + \frac{N}{11} < N.$$

Таким образом, N делится на $8 = 2^3$.

6. Даны действительные числа $a \geqslant 1$, $b \geqslant 2$, $c \geqslant 3$ такие, что $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 21$. Докажите, что $a + b + c \geqslant 7$.

Решение. Предположим противное: $a + b + c < 7$. Пусть $a = 1 + a_1$, $b = 2 + b_1$, $c = 3 + c_1$. Так как

$$a + b + c = 6 + a_1 + b_1 + c_1 < 7,$$

то $a_1 + b_1 + c_1 < 1$. Поскольку a_1, b_1, c_1 неотрицательны, то $0 \leqslant a_1, b_1, c_1 < 1$.

Подставим выражения для a, b, c в неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 21$. Получим

$$14 + 2a_1 + 4b_1 + 6c_1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \geqslant 21.$$

Заметим, что
$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 < a_1 + b_1 + c_1 < 1,$$
и
$$2a_1 + 4b_1 + 6c_1 < 6(a_1 + b_1 + c_1) < 6.$$
Следовательно,
$$a^2 + b^2 + c^2 = 14 + 2a_1 + 4b_1 + 6c_1 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 < 14 + 6 + 1 = 21.$$
Противоречие. Значит, $a + b + c \geqslant 7$.