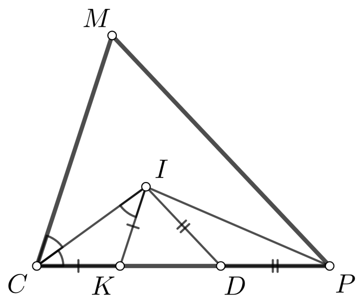
Дистанционный отбор

1.1. Дан треугольник CPM. Пусть I — точка пересечения его трёх биссектрис. На отрезке PC отмечены точки D и K так, что $DI \parallel PM$ и $KI \parallel CM$. Известно, что $CP = 24$, $PM = 27$ и $CM = 29$. Чему равен периметр треугольника IDK?

Ответ: 24.

Решение. Заметим, что из параллельности $\angle CIK = \angle ICM$, а так как CI — биссектриса угла C, то $\angle CIK = \angle ICK$, то есть треугольник CIK равнобедренный и $IK = CK$. Аналогично $ID = PD$. Таким образом, периметр треугольника IDK равен длине стороны CP, то есть 24.



1.2. Дан треугольник CPM. Пусть I — точка пересечения его трёх биссектрис. На отрезке PC отмечены точки D и K так, что $DI \parallel PM$ и $KI \parallel CM$. Известно, что $CP = 32$, $PM = 38$ и $CM = 41$. Чему равен периметр треугольника IDK?

Ответ: 32.

1.3. Дан треугольник CPM. Пусть I — точка пересечения его трёх биссектрис. На отрезке PC отмечены точки D и K так, что $DI \parallel PM$ и $KI \parallel CM$. Известно, что $CP = 42$, $PM = 37$ и $CM = 45$. Чему равен периметр треугольника IDK?

Ответ: 42.

1.4. Дан треугольник CPM. Пусть I — точка пересечения его трёх биссектрис. На отрезке PC отмечены точки D и K так, что $DI \parallel PM$ и $KI \parallel CM$. Известно, что $CP = 48$, $PM = 44$ и $CM = 43$. Чему равен периметр треугольника IDK?

Ответ: 48.

2. По итогам предварительного турнира в финал чемпионата по городкам прошли пятеро участников. Финал проводится по следующей схеме. Сначала играется матч между игроками, занявшими в предварительном турнире 5-е и 4-е места. Проигравшему в этом матче присуждается пятый приз, а победивший играет матч с игроком, занявшим в предварительном турнире 3-е место. Проигравшему в этом матче присуждается четвертый приз, а победивший играет матч с игроком, занявшим в предварительном турнире 2-е место. Проигравшему в этом матче присуждается третий приз, а победивший играет матч с игроком, занявшим в предварительном турнире 1-е место. Проигравшему в этом матче присуждается второй приз, а победившему — первый приз.

Сколькими способами могут распределиться призы в финале? (Считается известным, как распределились места в предварительном турнире).

Ответ: 16.

Решение. Заметим, что распределение призов однозначно определяется результатами поединков, причём для разных результатов поединков получаются разные распределения. В каждом из четырёх поединков возможно два исхода, поэтому всего возможно $2^4 = 16$ распределений призов.

3.1. Найдите количество правильных несократимых дробей, у которых произведение числителя и знаменателя равно 20! *(Дробь $\frac{a}{b}$ правильная несократимая, если a и b — взаимно простые натуральные числа и $a < b$. $20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 20$.)*

Ответ: 128.

Решение. Разложим 20! на простые множители:

$$2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdot 13^{\alpha_6} \cdot 17^{\alpha_7} \cdot 19^{\alpha_8}.$$

Заметим, что если a делится на 2, то b не может делиться на 2, так как a и b взаимно просты. Но тогда a делится на 2^{α_1}. Если же a не делится на 2, то b делится на 2^{α_1}. Аналогично со всеми другими простыми множителями.

Количество способов разбить числа $2^{\alpha_1}, \ldots, 19^{\alpha_8}$ на два подмножества равно $\frac{2^8}{2} = 128$. Каждому разбиению на подмножества соответствует искомая дробь — меньшее из произведений равно числителю, а большее равно знаменателю (произведения чисел в подмножествах, очевидно, не равны, так как имеют разные разложения на простые множители). Таким образом, количество искомых дробей равно 128.

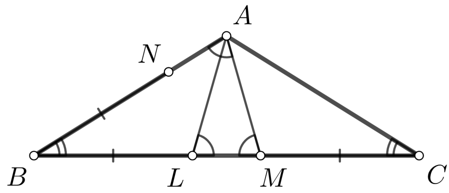
3.2. Найдите количество правильных несократимых дробей, у которых произведение числителя и знаменателя равно 25! *(Дробь $\frac{a}{b}$ называется правильной несократимой, если a и b — взаимно простые натуральные числа и $a < b$. $25! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 25$.)*

Ответ: 256.

4.1. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC, $\angle BAC = 92°$. На сторонах BC и AB отмечены такие точки M и N соответственно, что $BM = BA$ и $BN = CM$. Найдите градусную меру угла BNM.

Ответ: 112°.

Решение. Отметим на отрезке BM такую точку L, что $BL = BN = CM$ (такая найдётся, так как из неравенства треугольника для треугольника ABC следует, что $CM < AB$).



Треугольник ABM равнобедренный, поэтому из симметрии относительно его биссектрисы угла B следует, что $\angle BNM = \angle BLA$. Треугольник ABC равнобедренный, поэтому из симметрии относительно биссектрисы его угла A следует, что $AL = AM$. Следовательно,

$$\angle BLA = 180^\circ - \angle ALM = 180^\circ - \angle AML = 180^\circ - \angle BAM = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle ABC}{2} =$$

$$= 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ - \angle BAC}{2} = 135^\circ - \frac{\angle BAC}{4} = 112^\circ.$$

4.2. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC, $\angle BAC = 116^\circ$. На сторонах BC и AB отмечены такие точки M и N соответственно, что $BM = BA$ и $BN = CM$. Найдите градусную меру угла BNM.

Ответ: 106°.

4.3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC, $\angle BAC = 124^\circ$. На сторонах BC и AB отмечены такие точки M и N соответственно, что $BM = BA$ и $BN = CM$. Найдите градусную меру угла BNM.

Ответ: 104°.

4.4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC, $\angle BAC = 148^\circ$. На сторонах BC и AB отмечены такие точки M и N соответственно, что $BM = BA$ и $BN = CM$. Найдите градусную меру угла BNM.

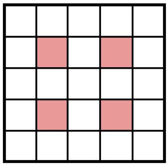
Ответ: 98°.

5. Введите все натуральные n, не превосходящие 32, такие, что квадрат $n \times n$ можно разрезать на одинаковое число квадратов 2×2 и 1×1.

Ответ: 10, 15, 20, 25, 30.

Решение. Пусть квадратов каждого вида ровно k. Тогда их суммарная площадь равна $5k$, то есть сторона квадрата должна делиться на 5. Если сторона квадрата равна $n = 5n_1$, то квадратов каждого вида должно быть $5n_1^2$.

Из квадрата 5×5 не получится вырезать больше 4 квадратов 2×2, так как каждый квадрат 2×2 должен содержать одну из выделенных на рисунке клеток. Но по доказанному ранее их должно быть 5, поэтому квадрат 5×5 разрезать нужным образом не удастся.



Несложно видеть, что из квадратов бóльших размеров получится вырезать нужное количество квадратов 2×2, а оставшуюся часть квадрата нужно разрезать на единичные квадратики. Следовательно, все n, кратные 5 и большие 5, подходят.

6.1. Про целое число a известно, что $a^3 + 7^2$ делится на $a + 7$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Ответ: 287.

Решение. Заметим, что

$$a^3 + 7^2 = (a^3 + 7a^2) - (7a^2 + 7^2a) + (7^2a + 7^3) - (7^3 - 7^2).$$

Первые три скобки делятся на $a + 7$, поэтому и $7^3 - 7^2$ должно делиться на $a + 7$. Но тогда $7^3 - 7^2 \geqslant a + 7$, поэтому $7^3 - 7^2 - 7 \geqslant a$. Несложно видеть, что $a = 7^3 - 7^2 - 7 = 287$ подходит.

6.2. Про целое число a известно, что $a^3 + 8^2$ делится на $a + 8$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Ответ: 440.

6.3. Про целое число a известно, что $a^3 + 9^2$ делится на $a + 9$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Ответ: 639.

6.4. Про целое число a известно, что $a^3 + 11^2$ делится на $a + 11$. Найдите наибольшее возможное значение a.

Ответ: 1199.

7.1. 100 благородных рыцарей приняли участие в рыцарском турнире. Все рыцари обладают разным уровнем ловкости, причём более ловкий всегда побеждает менее ловкого. В первый день все рыцари провели по одному бою (в бою соревнуются два рыцаря). На следующий день снова все 100 рыцарей провели по одному бою, но каждому достался другой противник. После этого рыцари, одержавшие две победы, были объявлены победителями, а все остальные — призёрами. Какое наибольшее количество призёров могло быть на турнире?

Ответ: 99.

Решение. Заметим, что самый ловкий рыцарь обязательно будет победителем, поэтому призёров не больше 99.

Приведём пример, когда призёров было ровно 99. Для этого занумеруем рыцарей числами от 1 до 100 в порядке уменьшения ловкости. Пусть в первом раунде прошли бои

$$1-2,\ 3-4,\ \ldots,99-100,$$

а во втором раунде прошли бои

$$1-100,\ 2-3,\ 4-5,\ \ldots,98-99.$$

При таких боях рыцарь 1 одержал две победы, рыцари 2, …, 99 одержали по одной победе, рыцарь 100 не одержал ни одной победы.

7.2. 300 благородных рыцарей приняли участие в рыцарском турнире. Все рыцари обладают разным уровнем ловкости, причём более ловкий всегда побеждает менее ловкого. В первый день все рыцари провели по одному бою (в бою соревнуются два рыцаря). На следующий день снова все 300 рыцарей провели по одному бою, но каждому достался другой противник. После этого рыцари, одержавшие две победы, были объявлены победителями, а все остальные — призёрами. Какое наибольшее количество призёров могло быть на турнире?

Ответ: 299.

7.3. 128 благородных рыцарей приняли участие в рыцарском турнире. Все рыцари обладают разным уровнем ловкости, причём более ловкий всегда побеждает менее ловкого. В первый день все рыцари провели по одному бою (в бою соревнуются два рыцаря). На следующий день снова все 128 рыцарей провели по одному бою, но каждому достался другой противник. После этого рыцари, одержавшие две победы, были объявлены победителями, а все остальные — призёрами. Какое наибольшее количество призёров могло быть на турнире?

Ответ: 127.

7.4. 360 благородных рыцарей приняли участие в рыцарском турнире. Все рыцари обладают разным уровнем ловкости, причём более ловкий всегда побеждает менее ловкого. В первый день все рыцари провели по одному бою (в бою соревнуются два рыцаря). На следующий день снова все 360 рыцарей провели по одному бою, но каждому достался другой противник. После этого рыцари, одержавшие две победы, были объявлены победителями, а все остальные — призёрами. Какое наибольшее количество призёров могло быть на турнире?

Ответ: 359.

8. Вите нравятся шестизначные числа, в записи которых по разу встречаются все цифры от 1 до 6. Он записал все эти числа в порядке убывания и поставил между ними чередующиеся знаки «+» и «−»:

$$654321-654312+654231-654213+\ldots$$

Затем он вычислил значение полученного выражения. Какое число получилось у Вити?

Ответ: 7560.

Решение. Разобьём числа на пары соседних. Несложно видеть, что соседние числа будут иметь вид $\overline{xab}$ и $\overline{xba}$, где x — четырёхзначное число, a и b — цифры, причём $a > b$. Разность этих чисел равна

$$\overline{xab} - \overline{xba} = \overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b).$$

Разность $d = a - b$ может принимать значения от 1 до 5, причём значение d принимается для $6 - d$ пар цифр. Для каждой пары цифр существует 4! пары чисел, которые содержат эту пару цифр в качестве последних двух цифр. Таким образом, для данного d сумма разностей чисел в соответствующих парах равна $4! \cdot 9d \cdot (6 - d)$. Просуммировав по d от 1 до 5, получим ответ 7560.

9.1. На четырёх стенах, а также на полу и на потолке комнаты написано по одному натуральному числу. Серёжа обошёл комнату и в каждом углу внизу написал произведение трёх чисел, написанных на полу и на примыкающих к этому углу двух стенах. Затем он принёс лестницу и в каждом углу вверху написал произведение трёх чисел, написанных на потолке и на примыкающих двух стенах. Сумма восьми полученных произведений оказалась равна 615. А какова сумма шести исходных чисел?

Ответ: 49.

Решение. Пусть числа на двух противоположных стенах равны a_1 и a_2, ну двух других — b_1 и b_2, а на поле и на потолке — c_1 и c_2. Несложно видеть, что тогда число, вычисленное Серёжей, равно $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)$. Поскольку разложение числа 615 на простые множители — это $3 \cdot 5 \cdot 41$, то одна из скобок равна 3, другая 5, а третья 41. Следовательно, сумма исходных чисел равна $3 + 5 + 41 = 49$.

9.2. На четырёх стенах, а также на полу и на потолке комнаты написано по одному натуральному числу. Серёжа обошёл комнату и в каждом углу внизу написал произведение трёх чисел, написанных на полу и на примыкающих к этому углу двух стенах. Затем он принёс лестницу и в каждом углу вверху написал произведение трёх чисел, написанных на потолке и на примыкающих двух стенах. Сумма восьми полученных произведений оказалась равна 645. А какова сумма шести исходных чисел?

Ответ: 51.

9.3. На четырёх стенах, а также на полу и на потолке комнаты написано по одному натуральному числу. Серёжа обошёл комнату и в каждом углу внизу написал произведение трёх чисел, написанных на полу и на примыкающих к этому углу двух стенах. Затем он принёс лестницу и в каждом углу вверху написал произведение трёх чисел, написанных на потолке и на примыкающих двух стенах. Сумма восьми полученных произведений оказалась равна 705. А какова сумма шести исходных чисел?

Ответ: 55.

9.4. На четырёх стенах, а также на полу и на потолке комнаты написано по одному натуральному числу. Серёжа обошёл комнату и в каждом углу внизу написал произведение трёх чисел, написанных на полу и на примыкающих к этому углу двух стенах.

Затем он принёс лестницу и в каждом углу вверху написал произведение трёх чисел, написанных на потолке и на примыкающих двух стенах. Сумма восьми полученных произведений оказалась равна 795. А какова сумма шести исходных чисел?

Ответ: 61.

10.1. В остроугольном треугольнике PQR на стороне PR выбрана такая точка M, что $2MP = QR$. На прямой PR отметили точки N и L такие, что $PM = PN$ и $RM = RL$. Оказалось, что $QN = QL$. Известно, что $\angle PQR = 43°$. Чему равен угол QPR? Ответ дайте в градусах.

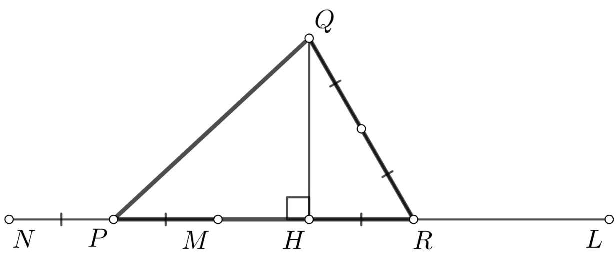
Ответ: 77°.

Решение. Опустим высоту QH на отрезок PR. Так как треугольник QNL равнобедренный, то H — середина отрезка NL. Так как $NL = 2PR$, то

$$HR = HL - LR = PR - RM = PM = \frac{QR}{2}.$$

Таким образом, в прямоугольном треугольнике HQR катет HR в два раза короче гипотенузы QR, то есть $\angle PRQ = 60°$. Следовательно,

$$\angle QPR = 180° - 60° - \angle PQR = 120° - \angle PQR = 77°.$$



10.2. В остроугольном треугольнике PQR на стороне PR выбрана такая точка M, что $2MP = QR$. На прямой PR отметили точки N и L такие, что $PM = PN$ и $RM = RL$. Оказалось, что $QN = QL$. Известно, что $\angle PQR = 48°$. Чему равен угол QPR? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 72°.

10.3. В остроугольном треугольнике PQR на стороне PR выбрана такая точка M, что $2MP = QR$. На прямой PR отметили точки N и L такие, что $PM = PN$ и $RM = RL$. Оказалось, что $QN = QL$. Известно, что $\angle PQR = 34°$. Чему равен угол QPR? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 86°.

10.4. В остроугольном треугольнике PQR на стороне PR выбрана такая точка M, что $2MP = QR$. На прямой PR отметили точки N и L такие, что $PM = PN$ и $RM = RL$. Оказалось, что $QN = QL$. Известно, что $\angle PQR = 55°$. Чему равен угол QPR? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 65°.

11.1. Пусть x и y — различные положительные числа, $x > y$. Известно, что $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$. Найдите значение выражения $\frac{x+y}{x-y}$.

Ответ: 3.

Решение. Прибавив к исходному равенству $2xy$, получим

$$(x+y)^2 = \frac{9}{2}xy.$$

Вычтя из исходного равенства $2xy$, получим

$$(x-y)^2 = \frac{1}{2}xy.$$

Разделив одно на другое, получим

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = 9.$$

Поскольку значение выражения $\frac{x+y}{x-y}$ положительно, то оно равно 3.

11.2. Пусть x и y — различные положительные числа, $x > y$. Известно, что $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$. Найдите значение выражения $\frac{x+y}{x-y}$.

Ответ: 2.

12.1. Пусть $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$. Чему равно произведение $a_2 a_3 \ldots a_{59}$?

Ответ: $\frac{27000}{59}$.

Решение. Преобразуем выражение для a_n:

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4} = \frac{(n^2-1)(n^2+1) + 2n(n^2-1)}{n^4} =$$
$$= \frac{(n^2-1)(n+1)^2}{n^4} = \frac{(n-1)(n+1)^3}{n^4}.$$

Тогда произведение $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_k$ равно

$$\frac{1 \cdot 3^3}{2^4} \cdot \frac{2 \cdot 4^3}{3^4} \cdot \frac{3 \cdot 5^3}{4^4} \cdot \ldots \cdot \frac{(k-1)(k+1)^3}{k^4} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot (k-1)^4 \cdot k^3 \cdot (k+1)^3}{2^4 \cdot 3^4 \cdot 4^4 \cdot \ldots \cdot k^4}.$$

Сократив одинаковые сомножители, получим равенство

$$a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_k = \frac{(k+1)^3}{2^3 \cdot k}.$$

Подставив $k = 59$, получим ответ.

12.2. Пусть $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$. Чему равно произведение $a_2 a_3 \ldots a_{79}$?

Ответ: $\frac{64000}{79}$.

12.3. Пусть $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$. Чему равно произведение $a_2 a_3 \dots a_{99}$?

Ответ: $\frac{125000}{99}$.

12.4. Пусть $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$. Чему равно произведение $a_2 a_3 \dots a_{119}$?

Ответ: $\frac{216000}{119}$.