Системы счисления

Люди бывают 10 *типов: те, кто знает о двоичной системе счисления, и те, кто не знает.*

Фольклор

Теорема. Пусть b — натуральное число, большее 1. Любое натуральное число n может быть единственным образом представлено в виде

$$n = n_\ell b^\ell + n_{\ell-1} b^{\ell-1} + \ldots + n_1 b + n_0,$$

где ℓ — целое неотрицательное число и $n_0, n_1, \ldots, n_\ell \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.

1. Какое наименьшее число гирь необходимо для того, чтобы иметь возможность взвесить любое целое число граммов

(а) от 1 г до 31 г на двухчашечных весах, если гири можно класть только на одну чашу весов;

(б) от 1 г до 40 г, если гири можно класть на обе чаши?

2. Ваня задумал 10 натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Другой отгадывает их. За один ход Лена может назвать десять натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ и узнать значение суммы $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{10}x_{10}$. Сможет ли Лена за 2 вопроса узнать все загаданные числа?

3. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если ”пачка” состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

4. Докажите, что из набора $0, 1, 2, \ldots, 3^k{-}1$ можно выбрать 2^k чисел так, чтобы никакое из них не являлось средним арифметическим двух других выбранных чисел.

5. Существуют ли 100 прямоугольников, из которых можно составить любой клетчатый прямоугольник со сторонами, не превосходящими 1000?

6. Глава Монетного двора хочет выпустить монеты 12 номиналов (каждый – в натуральное число рублей) так, чтобы любую сумму от 1 до 6543 рублей можно было заплатить без сдачи, используя не более 8 монет. Сможет ли он это сделать? (При уплате суммы можно использовать несколько монет одного номинала.)