

Клетчатый разнобой

1. Можно ли раскрасить грани куба в три цвета так, чтобы каждый цвет присутствовал, но нельзя было увидеть одновременно грани всех трёх цветов, откуда бы мы ни взглянули на куб?
2. В клетках квадратной таблицы 5×5 расставлены числа 1 и -1 . Известно, что строк с положительной суммой больше, чем с отрицательной. Какое наибольшее количество столбцов этой таблицы может оказаться с отрицательной суммой?
3. Под одной из клеток доски 8×8 зарыт клад. Под каждой из остальных зарыта табличка, в которой указано, за какое наименьшее число шагов можно добраться из этой клетки до клада, если одним шагом можно перейти из клетки в соседнюю по стороне. Какое наименьшее число клеток надо перекопать, чтобы наверняка достать клад?
4. На шахматной доске стоят несколько ферзей. Известно, что каждый из них бьёт ровно N других. Какие значения может принимать N ?
5. На доске размером 8×8 в углу расставлены 9 фишек в форме квадрата 3×3 . Любая фишка может прыгать через другую фишку на свободную клетку (по горизонтали, вертикали или диагонали). Можно ли за некоторое количество прыжков расставить фишки в форме такого же квадрата в каком-либо другом углу доски?
6. На шахматной доске стоит 33 коня. Докажите, что какой-то конь бьёт хотя бы двух других.
7. Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существуют две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?
8. Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 1828 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 1828 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом.
9. На шахматной доске стоит 31 фишка. Докажите, что найдётся свободный уголок из трёх клеток.
10. Клетчатый квадрат 60×60 разбит на плиточки 2×5 . Докажите, что можно задать такое разбиение квадрата на прямоугольники 1×3 , что каждая плиточка 2×5 будет содержать целиком хотя бы один прямоугольник.
11. (а) В клетках доски 8×8 расставлены числа от 1 до 64, каждое по одному разу. Докажите, что найдутся две клетки, соседние по стороне, числа в которых различаются хотя бы на 5.
(б) По доске $n \times n$ прошла ладья, побывав в каждой клетке один раз, причем каждый её ход был ровно на одну клетку. Клетки занумерованы от 1 до n^2 в порядке прохождения ладьи. Пусть M — максимальная разность между номерами соседних (по стороне) клеток. Каково наименьшее возможное значение M ?