

Правильные треугольники

1. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC , B_1AC и C_1AB . Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.
2. В ромбе $ABCD$ угол B равен 120° . На сторонах AB и BC взяты точки P и Q , причём $AP = BQ$. Докажите, что треугольник PQD — правильный.
3. Через центр правильного треугольника проведены две прямые под углом 60° . Докажите, что отрезки этих прямых, заключённые внутри треугольника, равны.
4. На сторонах AB и BC дельтоида $ABCD$ ($AB = AD$, $BC = CD$) построены правильные треугольники ABE (наружу) и BCF (внутри). Докажите, что точки D , E и F лежат на одной прямой.
5. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 . На отрезке A_1B_1 во внешнюю сторону треугольника $A_1B_1C_1$ построен правильный треугольник $A_1B_1C_2$. Докажите, что C — середина отрезка C_1C_2 .
6. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X , что треугольники AXB и CXD равнобедренные с углом 120° при вершине X . Докажите, что найдётся такая точка Y , что треугольники BYC и AUD правильные.
7. (а) Равносторонние треугольники OAB и OCD имеют общую вершину O . Точки M и L — середины сторон AB и CD , точки K и N — середины отрезков AD и BC . Тогда треугольники MNK и KLN — равносторонние.

(б) Точка O внутри выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ такова, что треугольники ABO , CDO , EFO — равносторонние. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах отрезков BC , DE , AF также является равносторонним.