Степень вхождения двойки

Каждое целое ненулевое число n можно единственным образом представить в виде

$$n = 2^k \cdot m,$$

где m нечётно (возможно, $k = 0$). Число k называется *степенью вхождения двойки* в n и обозначается $\nu_2(n)$. Иначе говоря, $\nu_2(n)$ — наибольшая степень двойки, на которую делится n.

Замечание: греческая буква ν произносится как 'ню', не стоит путать её с буквой v латинского алфавита.

Свойства:

- $\nu_2(ab) = \nu_2(a) + \nu_2(b)$;
- если $\nu_2(a) \neq \nu_2(b)$, то $\nu_2(a \pm b) = \min(\nu_2(a), \nu_2(b))$;
- если $\nu_2(a) = \nu_2(b)$, то $\nu_2(a \pm b) > \nu_2(a) = \nu_2(b)$.

1. Решите в натуральных числах уравнение

$$2^x - 2^y = 2016.$$

2. Дано натуральное число n.
(а) Докажите, что

$$\nu_2(n!) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \left[\frac{n}{8}\right] + \ldots$$

Здесь $[x]$ обозначает *целую часть* числа x.

(б) Найдите степень вхождения двойки в число $(n+1) \cdot (n+2) \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot 2n$. Ответ не должен содержать многоточий и знаков суммирования.

(в) Может ли число $n!$ делиться на 2^n?

3. Вадим нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного числа, а Ваня — сумму всех чётных делителей этого числа. Может ли произведение этих двух чисел быть точным квадратом?

4. Докажите, что число $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ не является целым ни при каком натуральном $n \geqslant 2$.

5. Существуют ли три натуральных числа, сумма квадратов которых равна их удвоенному произведению?

6. Миша выбрал несколько последовательных натуральных чисел и каждое записал либо красным, либо синим карандашом (оба цвета присутствуют). Может ли сумма наименьшего общего кратного всех красных чисел и наименьшего общего кратного всех синих чисел являться степенью двойки?

7. На доске написано натуральное число n. Каждую минуту число на доске стирают и вместо него записывают $n/2$, если число было чётным, или $3n+1$, если число было нечётным. Докажите, что в этой последовательности обязательно встретится число делящееся на 4.