Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1.1. Известно, что число b является средним арифметическим действительных чисел a и c. Чему может быть равно значение выражения $ab+bc-ac-b^2$, если $a-c=10$? Укажите все варианты ответа.

Ответ: 25

Решение. Из условия следует, что $b = a+5$, а $c = a+10$. Тогда

$$\begin{aligned} ab+bc-ac-b^2 &= a(a+5)+(a+5)(a+10)-a(a+10)-(a+5)^2 = \\ &= (a^2+5a)+(a^2+15a+50)-(a^2+10a)-(a^2+10a+25) = 25. \end{aligned}$$

□

Задача 2.1. На клумбе в ряд растёт 75 цветков, какие-то распустились, остальные — нет. Известно, что если посмотреть на два цветка, между которыми ровно 5 других цветков, то один из них распустился, а другой нет. Какое наибольшее количество распустившихся цветков может быть?

Ответ: 39

Решение. Разобьём цветки на 6 групп из 12 подряд идущих и оставшиеся три цветка. В каждой группе из 12 будет 6 распустившихся цветков, и 6 нераспустившихся. Соответственно, всего распустившихся цветков будет не более $6 \cdot 6 + 3 = 39$. □

Задача 3.1. За круглым столом сидят 30 человек в чёрных и белых колпаках. Люди в чёрных колпаках всегда врут, люди в белых колпаках всегда говорят правду. Известно, что у каждого человека в чёрном колпаке ровно один из его соседей тоже носит чёрный колпак. Всех сидящих за столом спросили, сколько у них соседей в чёрных колпаках. 12 человек ответили, что ровно один, а остальные — что два (все видят цвета колпаков друг друга). Сколько всего людей за столом носят чёрные колпаки?

Ответ: 16

Решение. Назовем людей в белых колпаках *рыцарями*, а людей в чёрных колпаках *лжецами*.

Так как рядом с каждым лжецом сидит ровно один лжец, лжецы сидят парами, окружёнными рыцарями. Заметим также, что три рыцаря не могут сидеть подряд. Очевидно, «ровно один» ответили в точности рыцари, сидящие между рыцарем и лжецом (и такие рыцари сидят парами), а «ровно два» — все лжецы и рыцари, сидящие между лжецами. Таким образом, рыцарей, сидящих парами, 12 человек.

Пусть лжецов $2k$ человек, а рыцарей, сидящих между двумя лжецами — m человек. Шесть пар рыцарей и m рыцарей-одиночек разбивают окружность стола на $6+m$ промежутков, в каждом из которых сидит пара лжецов. Поэтому $6+m = k$. С другой стороны, «ровно два» сказали $2k + m = 18$ человек. Вычитая из второго равенства первое, получаем $3k = 24$, откуда и вытекает ответ. □

Задача 4.1. В ряду чисел

$$1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \ldots, 201, 201 \ldots, 201$$

каждое число n встречается ровно n раз для всех n от 1 до 201 Выберем в этом ряду такое число, слева и справа от которого чисел поровну. Чему равно это число?

Ответ: 142

Решение. Всего чисел в ряду $1 + 2 + 3 + \ldots + 201 = \frac{201 \cdot 202}{2} = 20301$, поэтому число, слева и справа от которого чисел поровну, стоит на 10151-й позиции. Следовательно, необходимо найти такое наименьшее n для которого $1 + 2 + \ldots + n \geqslant 10151$. Итак, $\frac{n(n+1)}{2} \geqslant 10151$. При $n = 141$ получаем $\frac{n(n+1)}{2} = 10011$, а при $n = 142$ получаем $\frac{n(n+1)}{2} = 10153$. Следовательно, ответом в задаче является число 142. □

Задача 5.1. У Лены и Миши есть по несколько коробок, в каждой из которых лежит натуральное число конфет. Общее количество конфет во всех коробках Лены в 13 раз больше общего количества конфет во всех коробках Миши. А если Лена отдаст коробку с наименьшим количеством конфет Мише, то у неё будет в 8 раз больше конфет, чем у него. Какое наибольшее количество коробок конфет могло быть у Лены?

Ответ: 23

Решение. Пусть самая маленькая коробка Лены весит x килограмм, остальные коробки суммарно весят y килограмм, а суммарный вес коробок Миши равен z килограмм.

Тогда из условия следует, что $x + y = 13z$, и $y = 8(x + z)$, откуда следует, что $8 \cdot 13 \cdot z = 8(x + y) = 13(y - 8x)$. А значит, $112x = 5y$, т.е. $x = \frac{5}{112} \cdot y$. Таким образом, наибольшее количество коробок равно $1 + \left[\frac{y}{x}\right] = 1 + \left[\frac{112}{5}\right] = 23$. □

Задача 6.1. Обозначим через $H(n)$ сумму нечётных цифр числа n. Например, $H(48) = 0$, $H(5) = 5$, $H(1287) = 8$. Найдите сумму $H(1) + H(2) + \ldots + H(300)$.

Ответ: 1603

Решение. Найдём отдельно сумму всех нечётных цифр в разрядах сотен, десятков и единиц. (Если число меньше 10, то мы полагаем равным 0 разряд десятков, а если меньше 100 — то разряд сотен.)

Каждая цифра встречается в разряде десятков и единиц по 30 раз, поэтому в сумму они дадут вклад $2 \cdot 30 \cdot (1+3+5+7+9) = 1500$, а в разряде сотен 100 раз будет 1, 1 раз —3, а в остальных числах в разряде сотен будет чётная цифра. Таким образом, требуемая сумма равняется $1500 + 100 + 3 = 1603$. □

Задача 7.1. Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2017 две клетки так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток?

Ответ: 3618721

Решение. Рассмотрим два случая.

1) Вырезанные клетки находятся в одном столбце. Тогда прямоугольник 2×2017 должен распадаться на два (один из которых может быть пустым), длинная сторона каждого из которых делится на 3. Это можно сделать $[2017/3] + 1 = 673$ способами.

2) Вырезанные клетки находятся в разных столбцах. Тогда прямоугольник 2×2017 разбивается на два уголка, которые вместе с вырезанными клетками образуют два квадрата 2×2, и пары уголков, образующие прямоугольники 2×3. Значит, надо подсчитать число способов, которыми можно из прямоугольника 2×2017 вырезать два квадрата 2×2 так, чтобы оставшуюся часть прямоугольника 2×2017 можно было разбить на прямоугольники 2×3, то есть чтобы остались три прямоугольника (один или два из которых могут быть пустыми), с длинными сторонами, делящимися на 3, и умножить его на 16 (число способов вырезать по одной клетке из двух квадратов 2×2). Если левый квадрат примыкает к краю прямоугольника 2×2017, то способов вырезать второй квадрат существует $[2015/3] + 1 = 672$. Сдвигая левый квадрат на 3 вправо, получаем 671 способ разместить правый квадрат и т.д. Итого, получаем $673 + 16 \cdot (672 + 671 + \ldots + 2 + 1) = 3618721$. □

Задача 8.1. Пусть $n = 2^{2023} - 2023^2$. Найдите последнюю цифру числа $2^n - n^2$.

Ответ: 7

Решение. Сначала найдём последнюю цифру числа 2^n. Заметим, что для каждого чётного числа k числа k и $2^4k = 16k$ оканчиваются на одну и ту же цифру. Следовательно, так как n даёт остаток 3 при делении на 4, то есть $n = 4q+3$, то мы получаем, что $2^n = 2^{4q+r} = 16^q \cdot 2^3$ оканчивается на ту же цифру, что и $2^3 = 8$.

Теперь найдём последнюю цифру числа n^2. Последняя цифра числа $2^{2023} = 8 \cdot 16^{505}$ равна 8, числа 2023^2 — 9, числа n — 9, числа n^2 — 1. Таким образом, последняя цифра требуемого числа равна $8 - 1 = 7$. □

Задача 9.1. На дворе лежат две кучи брёвен, в первой 2002 бревна, во второй — 4024. Артемий и Вадим ходят по очереди, начинает Артемий. За ход можно взять ненулевое чётное число брёвен из одной кучи, половину порубить, а оставшиеся сложить в другую кучу. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько брёвен и из какой кучи надо взять Артемию, чтобы победить независимо от ходов Вадима?

Ответ: Из второй, 1348

Решение. Рассмотрим произвольную игру с такими же правилами, но в которой в одной из куч изначально n брёвен, а в другой — m. Покажем, что в такой игре второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда $|m-n| \leqslant 1$.

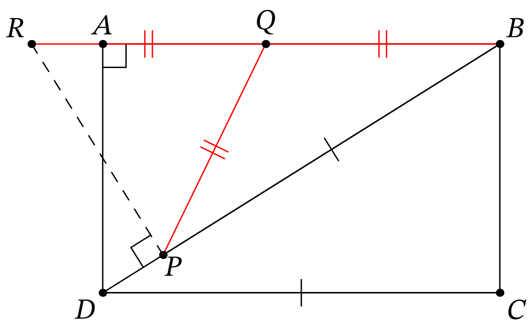
Пусть $|m-n| > 1$. Не умаляя общности, считаем, что $m > n$, $m-n = l$. Тогда пусть первый игрок возьмёт $2\left[\frac{l+1}{3}\right] = 2t$ брёвен. Тогда в первой кучке останется $M = m-2t$ брёвен, а во второй станет $N = n+t$. Проверим, что $|M-N| \leqslant 1$. Действительно, $|M-N| = |t-3l| \leqslant 1$, так как $l-1 \leqslant 3t \leqslant l+1$. Таким образом, если $|m-n| > 1$, то первый всегда может сделать ход, где $|M-N| \leqslant 1$.

Пусть теперь $|m-n| \leqslant 1$. Не умаляя общности, пусть первый возьмёт из первой кучки $2t$ брёвен. Тогда в первой кучке останется $M = m-2t$ брёвен, а во второй станет $N = n+t$. Тогда $|N-M| = |3t-m+n| \geqslant |3t| - |n-m| \geqslant 3-1 = 2$.

Из написанного следует, что выигрышными ходами Артемия являются те, после которых количество брёвен в кучках отличается максимум на 1. Нетрудно видеть, что взять 1348 брёвен из второй кучки — единственный ход, удовлетворяющий данному условию. □

Задача 10.1. В прямоугольнике $ABCD$ на отрезках BD и AB отмечены такие точки P и Q, что $BP = BA$ и $PQ = BQ$. Найдите длину отрезка BD, если $DP = 2$ и $AQ = 5$.

Ответ: 14



Решение. Отметим на продолжении прямой AB за точку A такую точку R, что $QR = QP = QB$. Заметим, что в треугольнике BPR медиана равна половине стороны, а значит он прямоугольный, $\angle BPR = 90°$.

Заметим, что треугольники ABD и PBR равны по катету и острому углу, откуда следует, что $AR = BR - AB = BD - BP = PD$.

Наконец, $BD = BR = 2RQ = 2(AR + AQ) = 2(DP + AQ) = 2 \cdot (2+5) = 14$.

□

Задача 11.1. Назовем пару натуральных чисел n и m особой, если $\sqrt{n} - \sqrt{m} = \sqrt{2024}$. Какое наименьшее значение может принимать сумма двух чисел, образующих особую пару?

Ответ: 5060

Решение. Перенесём $\sqrt{m}$ в другую сторону: $\sqrt{n} = \sqrt{m} + \sqrt{2024}$. Далее, возведём равенство в квадрат: $n = m + 2024 + 2\sqrt{2024m}$. Таким образом, $2024m$ является точным квадратом. А так как $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, то $m \geqslant 2 \cdot 11 \cdot 23 = 506$, откуда $n = 2024 + 2\sqrt{2024m} \geqslant 506 + 2024 + 2024 = 4554$. Следовательно, $n + m \geqslant 5060$. Нетрудно проверить, что пара $(4554, 506)$ подходит под условие. □

Задача 12.1. У Деда Мороза есть пятнадцать подарков: в первом подарке лежит одна конфета, во втором — две конфеты, в третьем — три, ..., в пятнадцатом — пятнадцать. Сколькими способами можно пронумеровать подарки числами от 1 до 15 так, чтобы ровно в одном подарке количество конфет было больше, чем номер подарка?

Ответ: 32752

Решение. Зафиксируем нумерацию подаров. Назовём подарок *хорошим*, если его номер совпадает с количеством конфет в нём, и *плохим* иначе. Тогда нетрудно заметить, что в подходящих способах плохих подарков всего хотя бы два. Всего количество способов выбрать некоторые подарки и объявить их плохими равно 2^{15}. Однако, в одном способе мы не выберем ни одного плохого подарка, а в 15 — ровно один, поэтому количество подходящих способов выбрать плохие подарки равно $2^{15} - 15 - 1 = 32752$. Проверим, что, зная набор плохих подарков, можно однозначно восстановить нумерацию всех подарков. Действительно, пусть в плохих подарках $a_1 > a_2 > \ldots > a_k$ конфет. Тогда в подарке с a_1 конфетами номер точно меньше количества конфет в нём, следовательно, в остальных плохих подарках номер больше количества конфет. Тогда подарок с a_2 конфетами точно пронумерован числом a_1, подарок с a_3 — числом a_2, ..., подарок с a_k конфетами — числом a_{k-1}. А подарку с a_1 конфетами остаётся номер a_k. Таким образом, количество требуемых нумераций совпадает с количеством способов выбора хотя бы двух плохих подарков, которое равняется 32752. □