Чем хороши середины?

1. **(а) Теорема Вариньона.** Докажите, что середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

   (б) Теорема Гаусса. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного четырёхугольника, и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

2. Внутри параллелограмма $ABCD$ отметили точку E так, что $CD = CE$. Докажите, что прямая DE перпендикулярна прямой, проходящей через середины отрезков AE и BC.

3. Точки D и E лежат на продолжениях сторон AB и BC остроугольного треугольника ABC за точки B и C соответственно. Точки M и N — середины отрезков AE и DC. Докажите, что $MN > AD/2$.

4. В четырёхугольнике $ABCD$, противоположные стороны которого не параллельны, точка E — середина AB, F — середина CD. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF и DE являются вершинами параллелограмма.

5. Точка P внутри треугольника ABC такова, что $\angle PBA = \angle PCA$. Докажите, что основания перпендикуляров из P на прямые BA и CA равноудалены от середины M стороны BC.

6. Пусть BD и CE — высоты остроугольного треугольника ABC. Точки P и Q симметричны середине M стороны BC относительно BD и CE соответственно. Докажите, что прямая PQ делит отрезок DE пополам.

7. Пусть D, E, F — середины сторон AB, BC, CA треугольника ABC соответственно. Через O_A, O_B, O_C обозначим центры окружностей, описанных около треугольников $\triangle ADF$, $\triangle BED$, $\triangle CFE$ соответственно. Докажите, что прямые O_AE, O_BF и O_CD пересекаются в одной точке.

8. Дан треугольник ABC. Точка B_1 делит пополам длину ломаной ABC (составленной из отрезков AB и BC), точка C_1 делит пополам длину ломаной ACB, точка A_1 делит пополам длину ломаной CAB. Через точки A_1, B_1 и C_1 проводятся прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C, параллельные биссектрисам углов BAC, ABC и ACB соответственно. Докажите, что прямые ℓ_A, ℓ_B и ℓ_C пересекаются в одной точке.