

Графы. Подвешивание.

1. В некотором городе началась эпидемия муравьиного гриппа. Сначала муравьиным гриппом заболел один человек. Когда человек здоров, он посещает за день всех своих больных друзей. Человек, который заболевает муравьиным гриппом, болеет ровно один день и весь день лежит дома, а на следующий день у него появляется иммунитет ровно на один день. Муравьиный грипп очень заразен, поэтому при посещении любого больного человек заболевает, если у него нет иммунитета. Докажите, что эпидемия муравьиного гриппа рано или поздно остановится.
2. В графе степень каждой вершины равна трём, и любые две несоседние вершины имеют общего соседа. Какое максимальное количество вершин может быть в этом графе?
3. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно выбрать изначальный город и маршрут, состоящий из не более чем 196 перелётов, проходящий через все города хотя бы по разу.
4. В стране 4000 дорог и (а) 1500 городов; (б) 2019 городов. Из каждого города выходят хотя бы 3 дороги. Докажите, что есть циклический маршрут, проходящий не более чем через 18 городов.
5. В дереве 100 висячих вершин. Докажите, что можно провести 50 ребер так, чтобы при удалении любого ребра граф оставался связным.
6. Степени всех вершин графа не меньше n , причем нет циклов длины 3, 4 и 5. Докажите, что в нем существует $n^2 - n$ вершин, никакие две из которых не смежны.