Графы. Индукция

1. Докажите, что вершины любого графа можно покрасить в два цвета так, чтобы разноцветных ребер было не меньше, чем одноцветных.

2. Докажите, что существует граф с $2n$ вершинами, степени которых равны $1, 1, 2, 2, \ldots, n, n$.

3. В компании из n человек ($n > 3$) у каждого появилась новость, известная ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2n - 4$ разговора все они могут узнать все новости.

4. В стране n городов. Между каждыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начинал путешествие. Докажите, что турист может выбрать город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придётся поменять вид транспорта не более одного раза.

5. В графе $2n$ вершин и $n^2 + 1$ ребро. Докажите, что в этом графе есть цикл из трёх вершин.

6. В стране любые два города связаны авиалинией одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно закрыть одну из авиакомпаний так, что по–прежнему от любого города можно будет добраться до любого другого.

7. В одной компании среди любых четырех человек есть знакомый с тремя остальными. Докажите, что есть человек, который знает всех.

8. Докажите, что существует связный граф на $6n$ вершинах, все степени всех вершин которого равны 3, в котором нет полных подграфов на 3 вершинах.

9. В графе 2024 вершины. Докажите, что его рёбра можно покрасить в 1012 цветов так, чтобы не было цикла, в котором все рёбра покрашены в один цвет.

10. В графе n вершин. В каждой из них лежит некоторое количество монет. За один ход разрешается переложить некоторое количество монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что из любого расположения монет можно сделать любое другое не более чем за $n - 1$ ходов.