Разнобой

1. На доске написаны натуральные числа от 1 до 1000. Разрешается брать два числа на доске, стирать их и вместо них писать разность между ними до тех пор, пока не получится одно число. Каким оно может быть?

2. Найдите все натуральные числа n такие, что числа 1, 2, 3, … n можно переставить в таком порядке a_1, a_2, … , a_n, что суммы $a_1 + \ldots + a_k$ будут давать разные остатки при делении на n при разных $k = 1, \ldots\ n$.

3. Проведены 2023 хорды данной окружности. Известно, что середина любой хорды принадлежит какой-то другой хорде. Докажите, что одна из хорд является диаметром.

4. Дана полоска $1 \times n$ ($n > 2$) и **(а)** две; **(б)** три шашки на ней, изначально стоящие в самых правых клетках полоски. Два игрока ходят по очереди. За ход игроку разрешается переместить любую фишку влево на любую свободную клетку. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто, в зависимости от n, выигрывает при правильной игре?

5. Двое играют на доске размером 7×7. Они по очереди ставят в клетки доски цифры от 1 до 7 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не оказалось одинаковых цифр. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто — начинающий или его соперник — сможет выиграть, как бы ни играл его партнёр?

6. Все натуральные делители числа n удалось разбить на пары так, что сумма делителей в каждой паре — простое число. Докажите, что все эти простые числа различны.

7. Даны 8 кубиков со стороной 1, грани которых покрашены в чёрный и белый цвета. Известно, что суммарно чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из них можно собрать кубик со стороной 2 так, чтобы на его границе было поровну граней каждого цвета.

8. Прямоугольник 42×44 разрезан на несколько прямоугольников 1×8 и две связные фигурки из 4 клеток. Докажите, что эти фигурки равны.