Инвариант

1. Над девятизначным числом разрешается производить следующее действие: любую цифру числа можно заменить на последнюю цифру суммы цифр этого числа. Можно ли с помощью таких действий из числа 111555777 получить число 123456789?

2. Есть три печатающих автомата. Первый по карточке с числами a и b выдает карточку с числами $a+1$ и $b+1$; второй по карточке с чётными числами a и b выдает карточку с числами $a/2$ и $b/2$; третий автомат по паре карточек с числами (a, b) и (b, c) выдает карточку с числами (a, c). Все автоматы возвращают заложенные в них карточки. Можно ли с помощью этих автоматов из карточки $(4, 30)$ получить карточку $(1, 2023)$?

3. По кругу расположены 30 монет, чередуясь: три подряд орлом, три решкой, три орлом, три решкой и т.д. Если у монеты два соседа лежат по разному, ее можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом с помощью таких операций?

4. По кругу стоят натуральные числа от 1 до 6 по порядку. Разрешается к любым трем подряд идущим числам прибавить по 1 или из любых трех, стоящих через одно, вычесть 1. Можно ли с помощью нескольких таких операций сделать все числа равными?

5. Четыре кузнечика сидят в вершинах квадрата. Каждую минуту один из них прыгает в точку, симметричную ему относительно другого кузнечика.
(а) Докажите, что никакие три кузнечика не могут оказаться на одной прямой, параллельной стороне квадрата.
(б) Докажите, что кузнечики не могут в некоторый момент оказаться в вершинах квадрата большего размера.

6. На доске выписаны числа $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$. Разрешается стереть любые два числа a и b и заменить их на число $ab + a + b$. Какое число останется после $n - 1$ такой операции?

7. На 44 деревьях, расположенных по окружности, сидели 44 весёлых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один — по часовой стрелке, другой — против). Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

8. На прямой стоят две фишки: слева красная справа синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух фишек одного цвета подряд (между фишками или с краю) и удаление пары соседних одноцветных фишек (между которыми нет других фишек). Можно ли с помощью таких операций оставить на прямой ровно две фишки: слева синюю, а справа красную?

9. На доске написана тройка чисел $(1, 1, 1)$. Каждую минуту Петя может заменить тройку (a, b, c) на одну из следующих троек: (a, c, b), $(-a, b, c)$, $(a + b, b, 2a + b + c)$ или $(a - b, b, b + c - 2a)$. Может ли он когда-нибудь получить тройку $(2021, 2023, 2023)$?