

Принцип крайнего

1. Докажите, что у любого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.
2. (а) 23 семиклассника сидят на занятии кружка по математике, причём все попарные расстояния между школьниками различные. Каждый тыкает ручкой ближайшего к нему семиклассника. Докажите, что найдётся счастливый семиклассник, которого никто не тыкает.
(б) Докажите, что можно собрать команду из 6 человек, в которой никто никого не тыкал ручкой на занятии.
3. В одну из голов стоглавого дракона пришла мысль расположить свои головы так, чтобы каждая находилась между двумя другими. Сможет ли он это сделать? (Головы дракона можно считать точками в пространстве.)
4. Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n - 1)^2$. Докажите, что среди них обязательно есть простое число.
5. Кубик Рубика $3 \times 3 \times 3$ надо распилить на единичные кубики. После распила части можно перекладывать и прикладывать так, чтобы можно было пилить несколько частей одновременно. Какое наименьшее число распилов нам понадобится?
6. Плоскость разрезана вдоль N прямых общего положения. Докажите, что к каждой прямой примыкает треугольник.
7. По кругу стоят несколько детсадовцев с конфетами. Каждую минуту дети половину своих конфет отдают своему соседу справа. В центре круга стоит воспитательница и следит, чтобы все делились честно. Если у малыша после передачи оказалось нечётное число конфет, то воспитательница забирает у него одну конфету. Докажите, что когда-то у всех детей конфет станет поровну.