Упорядочивание

1. На доске написано 2019 чисел. Оказалось, что сумма любых двух написанных на доске чисел также написана на доске. Какое наибольшее количество ненулевых чисел может быть написано?

2. На шахматной доске стоят несколько ладей. Докажите, что ладьи можно покрасить в 3 цвета так, чтобы никакие две одноцветные ладьи не били друг друга. (Ладья бьёт все клетки в её строке и в её столбце, на пути к которым не встречаются другие ладьи.)

3. Пусть каждое из $2n$ различных натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ не превосходит n^2 ($n > 2$). Докажите, что среди попарных разностей найдутся хотя бы три равные.

4. На тарелке лежат 9 разных кусочков сыра. Всегда ли можно разрезать один из них на две части так, чтобы полученные 10 кусочков делились на две порции равной массы по 5 кусочков в каждой?

5. На плоскости отмечено n точек. Докажите, что среди середин всевозможных отрезков с концами в этих точках не менее $2n - 3$ различных точек.

6. Даны n различных натуральных чисел. Обозначим через a и A наименьшее и наибольшее из них соответственно.

(а) Докажите, что НОК всех чисел не меньше na

(б) Докажите, что НОД всех чисел не больше A/n

7. В таблице 10×10 записаны числа от 1 до 100. В каждой строке выбирается третье по величине число. Докажите, что сумма этих чисел не меньше суммы чисел хотя бы одной из строк.

8. На прямой дано $2n + 1$ отрезков. Известно, что каждый пересекается не менее, чем с n из оставшихся. Доказать, что найдется отрезок, который пересекается со всеми.

9. В некоторой стране города соединены дорогами. Оказалось, не существует пути, проходящего через ℓ различных городов. Докажите, что тогда города можно разбить на ℓ округов так, чтобы любая дорога проходила между городами из разных округов.