Зацикливание и периодичность

1. Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: «Я в комнате номер …» и исчез в неизвестном направлении (записки на разных дверях могут сообщать разную информацию). Настойчивый школьник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу.

2. В некоторой стране стали очень популярны путешествия. При этом часть авиарейсов прекратило свою работу так, что оказалось, что теперь из каждого города ведёт ровно один односторонний маршрут в другой город. При этом в каждый город ведёт не более одного маршрута. Докажите, что турист, выехавший из столицы, когда-нибудь в неё вернётся.

3. Рассмотрим последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всех натуральных n. **(а)** Докажите, что последовательность остатков чисел Фибоначчи при делении на 2023 периодична без предпериода. **(б)** Можно ли найти такое n, что F_n и F_{n+1} делятся на 2023? **(в)** Докажите, что найдется такое n, что F_n делится на 2023.

4. Метеорологическая служба Цветочного города следит за погодой уже сто лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи доказали, что погода на следующий день однозначно определяется (по какому-то загадочному принципу) погодой в предыдущие семь дней. Последняя неделя в Цветочном городе была полностью солнечная. Докажите, что в будущем снова встретится полностью солнечная неделя.

5. В числовой последовательности $7, 2, 4, 6, 9, 1, 0, 6, \ldots$ каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов. Докажите, что **(а)** в этой последовательности снова встретится участок 7, 2, 4, 6; **(б)** в этой последовательности встретится участок 2, 0, 2, 3; **(в)** этот кусок встретится не позже чем через 5^5 членов в последовательности.

6. В Тридесятом Королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что в какой-то момент он проедет ту же дорогу, что и в самый первый раз, при этом в том же направлении.

7. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику. **(а)** Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков. **(б)** Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.

8. У Ивана есть неограниченный запас чёрных и белых кубиков, а также склеенный прямоугольник $a \times b$ из ab кубиков. Иван хочет положить кубики поверх данного прямоугольника так, чтобы получился параллелепипед $a \times b \times c$. Всегда ли он может выбрать c и так положить кубики, чтобы в полученном параллелепипеде каждый белый кубик граничил по стороне с чётным числом чёрных, а каждый чёрный — с нечётным числом белых?