Диагностическая работа. Дистанционный этап.

Задача 1.1. У Ивана есть сломанный калькулятор с одной кнопкой. При нажатии на кнопку, если число в калькуляторе делилось на 100, то он разделит его на 100; а иначе прибавит к текущему числу 1. Изначально Иван может ввести в калькулятор любое число от 1 до 2222. Какое максимальное число Иван может получить после ровно 90 нажатий этой кнопки?

Ответ: 2300.

Решение. Заметим, что число 2300 мы можем получить на последнем ходу, если Иван изначально ввел число 2210. Если Иван ввел число меньше 2210, то по итогу получится число меньше 2300. Если Иван ввел число, большее 2210, то получив 2300, оно поделится на 100, станет равным 23, и не поднимется выше 2300. □

Задача 1.2. У Ивана есть сломанный калькулятор с одной кнопкой. При нажатии на кнопку, если число в калькуляторе делилось на 50, то он разделит его на 50; а иначе прибавит к текущему числу 1. Изначально Иван может ввести в калькулятор любое число от 1 до 3333. Какое максимальное число Иван может получить после ровно 40 нажатий этой кнопки?

Ответ: 3350.

Задача 1.3. У Ивана есть сломанный калькулятор с одной кнопкой.При нажатии на кнопку, если число в калькуляторе делилось на 100, то он разделит его на 100; а иначе прибавит к текущему числу 1. Изначально Иван может ввести в калькулятор любое число от 1 до 3333. Какое максимальное число Иван может получить после ровно 70 нажатий этой кнопки?

Ответ: 3400.

Задача 1.4. У Ивана есть сломанный калькулятор с одной кнопкой. При нажатии на кнопку, если число в калькуляторе делилось на 200, то он разделит его на 200; а иначе прибавит к текущему числу 1. Изначально Иван может ввести в калькулятор любое число от 1 до 4444. Какое максимальное число Иван может получить после ровно 190 нажатий этой кнопки?

Ответ: 4600.

Задача 2.1. На острове живут блондины, брюнеты и рыжие. Каждый житель острова видит хотя бы 10 блондинов, 11 брюнетов и 12 рыжих. Какое минимальное количество людей может жить на острове?

Ответ: 36

Решение. Рассмотрим какого-нибудь блондина на острове. Поскольку он видит хотя бы 10 блондинов, то всего блондинов на острове хотя бы 11. Аналогично, на острове хотя бы 12 брюнетов и хотя бы 13 рыжих. Таким образом, на острове хотя бы $11 + 12 + 13 = 36$ человек.

Ситуация, когда на острове ровно 11 блондинов, 12 брюнетов и 13 рыжих, подходит под условие. □

Задача 2.2. На острове живут блондины, брюнеты и рыжие. Каждый житель острова видит хотя бы 10 блондинов, 14 брюнетов и 15 рыжих. Какое минимальное количество людей может жить на острове?

Ответ: 42

Задача 2.3. На острове живут блондины, брюнеты и рыжие. Каждый житель острова видит хотя бы 13 блондинов, 9 брюнетов и 15 рыжих. Какое минимальное количество людей может жить на острове?

Ответ: 40

Задача 2.4. На острове живут блондины, брюнеты и рыжие. Каждый житель острова видит хотя бы 20 блондинов, 16 брюнетов и 19 рыжих. Какое минимальное количество людей может жить на острове?

Ответ: 58

Задача 3.1. В замке жили два привидения — Вадим и Миша. Вадим постоянно лгал весной и в сентябре, Миша — летом, осенью и в феврале. В остальное время года они никого не обманывали. Однажды при встрече первому из них задали вопрос: «Как тебя зовут?»
— Вадим, — ответил он.
— А какой сегодня месяц?
— Завтра будет 1 мая.
Второй добавил: «А прошлый месяц был декабрь».
У второго спросили: «Ты говоришь правду?»
Он ответил: «Я всегда говорю правду в марте».
Кто из них Вадим, кто — Миша и в каком месяце состоялся этот разговор?

Ответ: Миша первый, Вадим второй, сентябрь

Решение. Если первый — Вадим, то он сказал правду и сейчас апрель. Но это невозможно, так как Вадим весной лжёт, в частности, в апреле. Значит, первый — Миша, и он солгал.
Также получаем, что второй Вадим, и он тоже лжёт, т.к. в марте он не может говорить правду. Единственный месяц, когда Миша и Вадим оба врут — это сентябрь. □

Задача 3.2. В замке жили два привидения — Вадим и Миша. Миша постоянно лгал осенью и в апреле, Вадим — весной, летом и в декабре. В остальное время года они никого не обманывали. Однажды при встрече первому из них задали вопрос: «Как тебя зовут?»
— Вадим, — ответил он.
— А какой сегодня месяц?
— Завтра будет 1 июля.
Второй добавил: «А прошлый месяц был апрель».
У второго спросили: «Ты говоришь правду?»
Он ответил: «Я всегда говорю правду в мае».
Кто из них Вадим, кто — Миша и в каком месяце состоялся этот разговор?

Ответ: Миша первый, Вадим второй, апрель

Задача 3.3. В замке жили два привидения — Вадим и Миша. Вадим постоянно лгал весной, зимой и в октябре, Миша — осенью и в июне. В остальное время года они никого не обманывали. Однажды при встрече первому из них задали вопрос: «Как тебя зовут?»
— Вадим, — ответил он.
— А какой сегодня месяц?
— Вчера было 31 декабря.
Второй добавил: «А следующий будет январь».
У второго спросили: «Ты говоришь правду?»
Он ответил: «Я всегда говорю правду в декабре».
Кто из них Вадим, кто — Миша и в каком месяце состоялся этот разговор?

Ответ: Миша первый, Вадим второй, октябрь

Решение. □

Задача 3.4. В замке жили два привидения — Вадим и Миша. Вадим постоянно лгал летом, весной и в январе, Миша — зимой и в сентябре. В остальное время года они никого не обманывали. Однажды при встрече первому из них задали вопрос: «Как тебя зовут?»
— Вадим, — ответил он.
— А какой сегодня месяц?
— Вчера было 31 марта.
Второй добавил: «А следующий будет апрель».
У второго спросили: «Ты говоришь правду?»
Он ответил: «Я всегда говорю правду в марте».
Кто из них Вадим, кто — Миша и в каком месяце состоялся этот разговор?

Ответ: Миша первый, Вадим второй, январь

Решение. □

Задача 4.1. Восемнадцать школьников, разбитых на три непустые группы, вместе съели 108 конфет. Каждый школьник первой группы съел по 19 конфет, второй — по 3 конфеты, третьей — по 1 конфете. Сколько школьников в каждой группе?

Ответ: 4, 9, 5

Решение. Обозначим через a, b, c количества школьников в первой, второй и третьей группах соответсвенно. Тогда выполняются два соотношения: $a+b+c = 18$ и $19a+3b+c = 108$.

Вычтя второе уравнение из первого, получим равенство $18a + 2b = 90$, или эквивлентное ему, $9a + b = 45$. Перебрав значения a от 1 до 5, видно, что единственным решением, где числа a, b, c являются натуральными, является тройка чисел $(4, 9, 5)$. □

Задача 4.2. Двадцать школьников, разбитых на три непустые группы, вместе съели 140 конфет. Каждый школьник первой группы съел по 15 конфет, второй — по 3 конфеты, третьей — по 4 конфеты. Сколько школьников в каждой группе?

Ответ: 6, 6, 8

Задача 4.3. Пятнадцать школьников, разбитых на три непустые группы, вместе съели 100 конфет. Каждый школьник первой группы съел по 10 конфет, второй — по 3 конфеты, третьей — по 4 конфеты. Сколько школьников в каждой группе?

Ответ: 7, 2, 6

Задача 4.4. Семнадцать школьников, разбитых на три непустые группы, вместе съели 100 конфет. Каждый школьник первой группы съел по 18 конфет, второй — по 1 конфете, третьей — по 9 конфет. Сколько школьников в каждой группе?

Ответ: 3, 10, 4

Задача 5.1. Сколько существует пятёрок целых чисел $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$, удовлетворяющих уравнению
$$(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 + (d-4)^2 + (e-5)^2 = 4?$$
Две пятёрки, отличающиеся перестановкой чисел, считаются различными.

Ответ: 90

Решение. Заметим, что квадратов целых чисел, не первосходящих 4, ровно 3 — это 0, 1 и 4. Значит, существует лишь два возможных набора значений скобок в левой части: либо ровно одна скобка равна 4, а остальные 0, либо 4 скобки равны 1, а одна 0. Посчитаем число подходящих пятёрок чисел в обоих случаях. Заметим, что если $(x-n)^2 = t^2 > 0$, то для соответствующей переменной x возможны ровно два значения $x = n \pm t$. Если же $(x-n)^2 = 0$, то $x = n$. Значит, в первом случае существует $5 \cdot 2 = 10$ подходящих наборов, а во втором случае — $2^4 \cdot 5 = 80$. Значит, всего подходящих наборов 90. □

Задача 6.1. Бабушка хочет связать из квадратных узорчатых лоскутков со стороной 1 прямоугольное одеяло 20×22. При этом она хочет, чтобы для каждого лоскутка нашлось бы хотя бы два соседних по стороне лоскутка, украшенных таким же узором. Какое максимальное количество узоров может быть в бабушкином одеяле?

Ответ: 110.

Решение. Если бабушка разделит одеяло на квадратики 2×2 и каждый из них украсит своим узором, то в одеяле будет ровно 110 узоров. Докажем, что это максимальное возможное число узоров. Рассмотрим произвольный лоскуток (присвоим ему номер 1), украшенный некоторым узором x. Тогда найдутся два соседних с ним по стороне лоскутка с тем же узором x — присвоим им номера 2 и 3. Для лоскутка 2 найдётся два соседних с ним лоскутка с узором x, но он не граничит с лоскутком 3, значит, найдётся соседний с ним лоскуток 4, не совпадающий с лоскутками 1, 2, 3. Таким образом, найдётся как минимум 4 лоскутка цвета x. Значит, для каждого узора найдётся не меньше 4 лоскутков, украшенных этим узором. То есть всего узоров не больше $\frac{20\cdot22}{4} = 110$, что и требовалось доказать. □

Задача 6.2. Бабушка хочет связать из квадратных узорчатых лоскутков со стороной 1 прямоугольное одеяло 20×24. При этом она хочет, чтобы для каждого лоскутка нашлось бы хотя бы два соседних по стороне лоскутка, украшенных таким же узором. Какое максимальное количество узоров может быть в бабушкином одеяле?

Ответ: 120.

Задача 6.3. Бабушка хочет связать из квадратных узорчатых лоскутков со стороной 1 прямоугольное одеяло 22×24. При этом она хочет, чтобы для каждого лоскутка нашлось бы хотя бы два соседних по стороне лоскутка, украшенных таким же узором. Какое максимальное количество узоров может быть в бабушкином одеяле?

Ответ: 132.

Задача 6.4. Бабушка хочет связать из квадратных узорчатых лоскутков со стороной 1 прямоугольное одеяло 20×26. При этом она хочет, чтобы для каждого лоскутка нашлось бы хотя бы два соседних по стороне лоскутка, украшенных таким же узором. Какое максимальное количество узоров может быть в бабушкином одеяле?

Ответ: 130.

Задача 7.1. В непрозрачном мешке 100 перчаток: 50 левых и 50 правых, среди них 40 белых и 60 чёрных. (При этом среди одноцветных перчаток левых и правых не обязательно должно быть поровну.) Какое минимальное количество перчаток нужно вслепую достать из этого мешка так, чтобы заведомо нашлась одноцветная пара левой и правой перчатки?

Ответ: 91.

Решение. Пусть достали 91 перчатку. Тогда достали как минимум 51 чёрную перчатку. Среди 51 чёрной перчатки найдётся как левая, так и правая перчатка, поскольку левых и правых перчаток по 50 штук.

Пусть в коробке лежит 40 белых левых перчаток, 50 чёрных правых и 10 чёрных левых. Тогда среди всех белых перчаток и 50 чёрных правых нет ни одной одноцветной пары левой и правой перчатки, и их ровно 90. □

Задача 7.2. В непрозрачном мешке 100 перчаток: 50 левых и 50 правых, среди них 30 белых и 70 чёрных. (При этом среди одноцветных перчаток левых и правых не обязательно должно быть поровну.) Какое минимальное количество перчаток нужно вслепую достать из этого мешка так, чтобы заведомо нашлась одноцветная пара левой и правой перчатки?

Ответ: 81.

Задача 7.3. В непрозрачном мешке 120 перчаток: 60 левых и 60 правых, среди них 50 белых и 70 чёрных. (При этом среди одноцветных перчаток левых и правых не обязательно должно быть поровну.) Какое минимальное количество перчаток нужно вслепую достать из этого мешка так, чтобы заведомо нашлась одноцветная пара левой и правой перчатки?

Ответ: 111.

Задача 7.4. В непрозрачном мешке 120 перчаток: 60 левых и 60 правых, среди них 30 белых и 90 чёрных. (При этом среди одноцветных перчаток левых и правых не обязательно должно быть поровну.) Какое минимальное количество перчаток нужно вслепую достать из этого мешка так, чтобы заведомо нашлась одноцветная пара левой и правой перчатки?

Ответ: 91.

Задача 8.1. На планете Вулкан есть 7 больших вулканов и 9 маленьких вулканов. Большой вулкан извергается раз в 3 года, а маленький — раз в 2 года (не обязательно все одновременно). За последние 25 лет зарегистрировано 167 извержений. Какое наибольшее количество извержений может быть зарегистрировано в следующем году?

Ответ: 13.

Решение. За 25 лет большой вулкан мог извергаться либо 8 раз, либо 9. Обозначим количества соответствующих больших вулканов через a, b. Тогда в следующем году может быть зарегистрировано не больше a извержений больших вулканов.

Маленький вулкан мог извергаться либо 12 раз, либо 13. Обозначим количества соответствующих маленьких вулканов через c, d. Тогда в следующем году будет зарегистрировано ровно c извержений маленьких вулканов.

Также известно, что $a+b=7$, $c+d=9$, $8a+9b+12c+13d=167$. Значит, в следующем году будет зарегистрировано не больше $a+c=7+9-(137-8\cdot7-12\cdot9)=9\cdot7+13\cdot9-137=13$ извержений. Оценка достигается при $a=6$, $b=1$, $c=7$, $d=2$. □

Задача 8.2. На планете Вулкан есть 11 больших вулканов и 7 маленьких вулканов. Большой вулкан извергается раз в 3 года, а маленький — раз в 2 года (не обязательно все одновременно). За последние 25 лет зарегистрировано 175 извержений. Какое наибольшее количество извержений может быть зарегистрировано в следующем году?

Ответ: 15.

Задача 8.3. На планете Вулкан есть 15 больших вулканов и 9 маленьких вулканов. Большой вулкан извергается раз в 3 года, а маленький — раз в 2 года (не обязательно все одновременно). За последние 25 лет зарегистрировано 243 извержения. Какое наибольшее количество извержений может быть зарегистрировано в следующем году?

Ответ: 9.

Задача 8.4. На планете Вулкан есть 17 больших вулканов и 8 маленьких вулканов. Большой вулкан извергается раз в 3 года, а маленький — раз в 2 года (не обязательно все одновременно). За последние 25 лет зарегистрировано 252 извержения. Какое наибольшее количество извержений может быть зарегистрировано в следующем году?

Ответ: 5.

Задача 9.1. Вадим делит кучу из 150 золотых монет на 6 непустых кучек. После этого Миша выбирает две из получившихся кучек и уравнивает количество монет в них, беря из большей кучки нужное количество монет (при этом Миша может не брать монеты, если он выбрал кучки с равным количеством монет), и отдавая разность обратно Вадиму. Какое максимальное количество монет Вадим может себе гарантировать?

Ответ: 9

Решение. Если Вадим разложит монеты на кучки с $1,\ 10,\ 19,\ 28,\ 37,\ 55$ монетами соответственно, то Миша будет вынужден вернуть ему как минимум 9 монет. Предположим, что Вадим может так разложить монеты на кучки, что Миша будет вынужден вернуть Вадиму 10 монет. Обозначим количества монет в кучках через n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6 так, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_6$. Тогда в силу предположения $n_{k+1} \geqslant n_k + 10$ при $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Но тогда $n_2 \geqslant n_1 + 10$, $n_3 \geqslant n_2 + 10 \geqslant n_1 + 20$, $\ldots$, $n_6 \geqslant n_1 + 50$. Складывая эти неравенства и учитывая, что $n_1 \geqslant 1$, поскольку кучки непустые, получаем, что $n_1 + n_2 + \ldots + n_6 \geqslant 6n_1 + 10 \cdot \frac{5\cdot 6}{2} \geqslant 6 + 150 = 156 > 150$ — противоречие. □

Задача 9.2. Вадим делит кучу из 189 золотых монет на 7 непустых кучек. После этого Миша выбирает две из получившихся кучек и уравнивает количество монет в них, беря из большей кучки нужное количество монет (при этом Миша может не брать монеты, если он выбрал кучки с равным количеством монет), и отдавая разность обратно Вадиму. Какое максимальное количество монет Вадим может себе гарантировать?

Ответ: 8

Задача 9.3. Вадим делит кучу из 112 золотых монет на 6 непустых кучек. После этого Миша выбирает две из получившихся кучек и уравнивает количество монет в них, беря из большей кучки нужное количество монет (при этом Миша может не брать монеты, если он выбрал кучки с равным количеством монет), и отдавая разность обратно Вадиму. Какое максимальное количество монет Вадим может себе гарантировать?

Ответ: 7

Задача 9.4. Вадим делит кучу из 220 золотых монет на 7 непустых кучек. После этого Миша выбирает две из получившихся кучек и уравнивает количество монет в них, беря из большей кучки нужное количество монет (при этом Миша может не брать монеты, если он выбрал кучки с равным количеством монет), и отдавая разность обратно Вадиму. Какое максимальное количество монет Вадим может себе гарантировать?

Ответ: 10

Задача 10.1. На доске выписаны натуральные числа от 1 до 40 включительно. Артемий хочет стереть одно написанное число, а другое зачеркнуть так, чтобы среднее арифметическое оставшихся тридцати восьми чисел было равно зачёркнутому числу. Какие числа он может стереть? Введите все возможные ответы.

Ответ: 1, 40

Решение. Пусть число, которое стёр Артемий, равно n. Во-первых, заметим, что если условие задачи выполнено, то среднее арифметическое оставшихся тридцати восьми равно среднему арифметическому тридцати девяти чисел, оставшихся на доске. Сумма нестёртых чисел равна

$$1 + 2 + \ldots + 40 - n = \frac{40 \cdot 41}{2} - n = 820 - n.$$

Таким образом, среднее арифметическое нестёртых чисел равно $\frac{820-n}{39}$, а поскольку это число должно быть целым, получаем делимость $820 - n \ \vdots\ 39$. Далее, так как 820 даёт остаток 1 при делении на 39, то $n - 1$ делится на 39. Значит, n может быть равно 1 или 40. В первом случае имеем $\frac{820-n}{39} = 21$, во втором $\frac{820-n}{39} = 20$, таким образом, оба случая подходят. $\square$

Задача 10.2. На доске выписаны натуральные числа от 1 до 60 включительно. Артемий хочет стереть одно написанное число, а другое зачеркнуть так, чтобы среднее арифметическое оставшихся пятидесяти восьми чисел было равно зачёркнутому числу. Какие числа он может стереть? Введите все возможные ответы.

Ответ: 1, 60

Задача 10.3. На доске выписаны натуральные числа от 1 до 100 включительно. Артемий хочет стереть одно написанное число, а другое зачеркнуть так, чтобы среднее арифметическое оставшихся девяноста восьми чисел было равно зачёркнутому числу. Какие числа он может стереть? Введите все возможные ответы.

Ответ: 1, 100

Задача 10.4. На доске выписаны натуральные числа от 1 до 50 включительно. Артемий хочет стереть одно написанное число, а другое зачеркнуть так, чтобы среднее арифметическое оставшихся сорока восьми чисел было равно зачёркнутому числу. Какие числа он может стереть? Введите все возможные ответы.

Ответ: 1, 50

Задача 11.1. Шесть обезьян собирали бананы: каждая собрала по 20 связок с 4 бананами на каждой, по одной связке с 3 бананами и по 7 отдельных бананов. Обезьяны могут как угодно меняться связками бананов при условии, что в конце у всех обезьян также должно быть по 90 бананов. Одна из обезьян — вождь. Какое максимальное количество отдельных бананов мог получить вождь в результате обменов?

Ответ: 38.

Решение. Докажем, что вождю достанется не более 38 отдельных бананов. Суммарное число бананов у каждой обезьяны чётно и не делится на 4. С одной стороны, из этого следует, что у любой обезьяны не могут быть только связки по 4 банана. С другой стороны, во всех оставшихся связках по нечётному числу бананов, а в разложении чётного числа на слагаемые нечётных слагаемых должно быть чётно. Таким образом, у каждой обезьяны хотя бы по 2 связки с нечётным числом бананов. Всего связок с 1 и 3 бананами $6 \cdot (1 + 7) = 48$, каждой из 5 обезьян, не являющихся вождём, обязано достаться не менее двух таких связок, откуда вождю достанется не более $48 - 5 \cdot 2 = 38$ отдельных бананов.

Заметим, что вождь мог получить 38 отдельных бананов, в случае когда три обезьяны получают 2 связки по 3 банана и 21 связку по 4 банана, две обезьяны — 22 связки по 4 банана и ещё 2 отдельных банана, а вождь — 13 связок по 4 банана и 38 отдельных бананов. □

Задача 11.2. Шесть обезьян собирали бананы: каждая собрала по 18 связок с 4 бананами на каждой, по одной связке с 3 бананами и по 15 отдельных бананов. Обезьяны могут как угодно меняться связками бананов при условии, что в конце у всех обезьян также должно быть по 90 бананов. Одна из обезьян — вождь. Какое максимальное количество отдельных бананов мог получить вождь в результате обменов?

Ответ: 86.

Задача 11.3. Шесть обезьян собирали бананы: каждая собрала по 19 связок с 4 бананами на каждой, по одной связке с 3 бананами и по 11 отдельных бананов. Обезьяны могут как угодно меняться связками бананов при условии, что в конце у всех обезьян также должно быть по 90 бананов. Одна из обезьян — вождь. Какое максимальное количество отдельных бананов мог получить вождь в результате обменов?

Ответ: 62.

Задача 12.1. На прямой отметили 100 точек и выписали все попарные расстояния между ними. Оказалось, что все эти числа натуральные. Какое наибольшее количество нечётных может быть среди них?

Ответ: 2500.

Решение. Пусть $x_1 < \ldots < x_{100}$ — координаты отмеченных точек на прямой. Пусть $S_k = x_k - x_1$. Заметим, что длина любого отрезка с концами в отмеченных точках — это разность некоторых S_m и S_n. Причём эта длина нечётна тогда и только тогда, когда S_n и S_m — числа разной чётности. Обозначим через a число чётных S_m. Тогда всего отрезков нечётной длины ровно $a(100-a)$. Причём $a(100-a) \leqslant 50^2$, поскольку $a^2-100a+50^2 = (50-a)^2 \geqslant 0$. Равенство достигается, например, если $x_k = k$. □

Задача 12.2. На прямой отметили 120 точек и выписали все попарные расстояния между ними. Оказалось, что все эти числа натуральные. Какое наибольшее количество нечётных может быть среди них?

Ответ: 3600.

Задача 12.3. На прямой отметили 130 точек и выписали все попарные расстояния между ними. Оказалось, что все эти числа натуральные. Какое наибольшее количество нечётных может быть среди них?

Ответ: 4225.

Задача 12.4. На прямой отметили 90 точек и выписали все попарные расстояния между ними. Оказалось, что все эти числа натуральные. Какое наибольшее количество нечётных может быть среди них?

Ответ: 2025.