Дистанционный отбор

1.1. Егор выписал на листочек все натуральные четные делители числа 20000. Найдите сумму чисел, выписанных Егором.

Ответ: 48422.

Решение. Натуральные четные делители числа n - это все натуральные делители числа $n/2$, умноженные на 2. Число $20000/2$ в разложении на простые множители равно $2^4 5^4$. Сумма всех натуральных делителей такого числа равна $(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+5+5^2+5^3+5^4) = \dfrac{2^5-1}{2-1} \cdot \dfrac{5^5-1}{5-1}$, значит сумма чисел, выписанная Егором, равна $\dfrac{(2^5-1)(5^5-1)}{2}$.

1.2. Егор выписал на листочек все натуральные четные делители числа 5000. Найдите сумму чисел, выписанных Егором.

Ответ: 10934.

1.3. Егор выписал на листочек все натуральные четные делители числа 8000. Найдите сумму чисел, выписанных Егором.

Ответ: 19656.

1.4. Егор выписал на листочек все натуральные четные делители числа 40000. Найдите сумму чисел, выписанных Егором.

Ответ: 98406.

2.1. Юра выписал на листочек все числа, делящиеся на 1001 и представимые в виде $10^j - 10^i$, где i, j целые, $0 \leqslant i < j \leqslant 101$. Сколько чисел выписал Юра?

Ответ: 816.

Решение. Переобозначим переменные: пусть $j = i + k$. Тогда $10^j - 10^i = 10^i(10^k - 1)$, причем 10^i взаимно просто с 1001, значит $10^k - 1$ делится на 1001, то есть $10^k \equiv 1 \pmod{1001}$. Заметим, что $10^3 \equiv -1 \pmod{1001}$, поэтому $10^6 \equiv 1 \pmod{1001}$. Значит, показатель числа 10 по модулю 1001 — один из делителей числа 6. Но он не равен ни 1, ни 2, ни 3, поэтому равен 6. Значит, число, выписанное Юрой, делится на 1001 тогда и только тогда, когда $i \equiv j \pmod 6$. Заметим, что для каждого остатка по модулю 6 существует ровно 17 чисел от 0 до 101 с таким остатком. Поэтому ответом в задаче будет число $6 \cdot C_{17}^2$.

2.2. Юра выписал на листочек все числа, делящиеся на 1001 и представимые в виде $10^j - 10^i$, где i, j целые, $0 \leqslant i < j \leqslant 107$. Сколько чисел выписал Юра?

Ответ: 918.

2.3. Юра выписал на листочек все числа, делящиеся на 1001 и представимые в виде $10^j - 10^i$, где i, j целые, $0 \leqslant i < j \leqslant 95$. Сколько чисел выписал Юра?

Ответ: 720.

2.4. Юра выписал на листочек все числа, делящиеся на 1001 и представимые в виде $10^j - 10^i$, где i, j целые, $0 \leqslant i < j \leqslant 89$. Сколько чисел выписал Юра?

Ответ: 630.

3.1. Лиза выписала на листочек все натуральные числа, не превосходящие 600 и представимые в виде $[2x] + [4x] + [6x] + [8x]$ с положительным x. Сколько чисел выписала Лиза? ($[y]$ — целая часть y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 360.

Решение. Пусть $[2x] = a$, $\{2x\} = b$. Тогда:

$$\begin{array}{lcl}
b \in [0, 1/4) & \Rightarrow & [2x]+[4x]+[6x]+[8x] = a+2a+3a+4a = 10a; \\
b \in [1/4, 1/3) & \Rightarrow & [2x]+[4x]+[6x]+[8x] = a+2a+3a+(4a+1) = 10a+1; \\
b \in [1/3, 1/2) & \Rightarrow & [2x]+[4x]+[6x]+[8x] = a+2a+(3a+1)+(4a+1) = 10a+2; \\
b \in [1/2, 2/3) & \Rightarrow & [2x]+[4x]+[6x]+[8x] = a+(2a+1)+(3a+1)+(4a+2) = 10a+4; \\
b \in [2/3, 3/4) & \Rightarrow & [2x]+[4x]+[6x]+[8x] = a+(2a+1)+(3a+2)+(4a+2) = 10a+5; \\
b \in [3/4, 1) & \Rightarrow & [2x]+[4x]+[6x]+[8x] = a+(2a+1)+(3a+2)+(4a+3) = 10a+6.
\end{array}$$

Из написанного следует, что среди каждых десяти последовательных целых чисел представимы в нужном виде ровно 6 чисел. Поэтому ответом в задаче является число $600 \cdot \dfrac{6}{10}$.

3.2. Лиза выписала на листочек все натуральные числа, не превосходящие 700 и представимые в виде $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ с положительным x. Сколько чисел выписала Лиза? ($[y]$ — целая часть y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 420.

3.3. Лиза выписала на листочек все натуральные числа, не превосходящие 800 и представимые в виде $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ с положительным x. Сколько чисел выписала Лиза? ($[y]$ — целая часть y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 480.

3.4. Лиза выписала на листочек все натуральные числа, не превосходящие 900 и представимые в виде $[2x]+[4x]+[6x]+[8x]$ с положительным x. Сколько чисел выписала Лиза? ($[y]$ — целая часть y, то есть наибольшее целое число, не превосходящее y).

Ответ: 540.

4.1. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, \ldots, 50\}$ Вика расположила элементы этого подмножества по убыванию и записала на доску значение знакопеременной суммы. Все знакопеременные суммы начинались с положительного слагаемого. Например, для подмножества $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ Вика выписала число 6, так как $9-6+4-2+1=6$, а для подмножества $\{5\}$ она выписала число 5. Найдите сумму чисел, которые выписала Вика. В ответе укажите остаток этой суммы при делении на 31.

Ответ: 25.

Решение. Добавим пустое подмножество в рассматриваемые подмножества и определим его знакопеременную сумму как 0. Рассмотрим следующее соответствие. Возьмем произвольное подмножество $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, для которого $50 > a_1 > a_2 > \ldots > a_k$. Сопоставим ему подмножество $\{50, a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Понятно, что таким способом все подмножества разбиваются на непересекающиеся пары. Посчитаем сумму чисел, которые Вика выписала для каждой пары. Эта сумма равна $(a_1 - a_2 + \ldots \pm a_k) + (50 - a_1 + a_2 - \ldots \mp a_k) = 50$. Общее количество пар вдвое меньше общего количества подмножеств, то есть $2^{50}/2 = 2^{49}$. Значит, общая сумма чисел, выписанных Викой, равна $2^{49} \cdot 50$. Посчитаем остаток. Так как $2^5 = 32 \equiv 1 \pmod{31}$, то

$$2^{49} \cdot 50 \equiv 2^{50} \cdot 25 \equiv 1 \cdot 25 \equiv 25 \pmod{31}.$$

4.2. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, \ldots, 70\}$ Вика расположила элементы этого подмножества по убыванию и записала на доску значение знакопеременной суммы. Все знакопеременные суммы начинались с положительного слагаемого. Например, для подмножества $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ Вика выписала число 6, так как $9-6+4-2+1=6$, а для подмножества $\{5\}$ она выписала число 5. Найдите сумму чисел, которые выписала Вика. В ответе укажите остаток этой суммы при делении на 31.

Ответ: 4.

4.3. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, \ldots, 80\}$ Вика расположила элементы этого подмножества по убыванию и записала на доску значение знакопеременной суммы. Все знакопеременные суммы начинались с положительного слагаемого. Например, для подмножества $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ Вика выписала число 6, так как $9 - 6 + 4 - 2 + 1 = 6$, а для подмножества $\{5\}$ она выписала число 5. Найдите сумму чисел, которые выписала Вика. В ответе укажите остаток этой суммы при делении на 31.

Ответ: 9.

4.4. Для каждого непустого подмножества множества $\{1, 2, \ldots, 100\}$ Вика расположила элементы этого подмножества по убыванию и записала на доску значение знакопеременной суммы. Все знакопеременные суммы начинались с положительного слагаемого. Например, для подмножества $\{1, 2, 4, 6, 9\}$ Вика выписала число 6, так как $9 - 6 + 4 - 2 + 1 = 6$, а для подмножества $\{5\}$ она выписала число 5. Найдите сумму чисел, которые выписала Вика. В ответе укажите остаток этой суммы при делении на 31.

Ответ: 19.

5.1. В шахматном турнире участвовали n гроссмейстеров. В течение турнира каждый гроссмейстер сыграл с каждым по одной партии. Каждая партия закончилась либо победой одного из игроков, либо вничью. За победу игроку начислялось 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражение — 0 очков. После турнира 10 гроссмейстеров с наименьшими суммами очков были объявлены призерами, а остальные — победителями. Оказалось, что каждый игрок набрал половину всех своих очков в партиях против призеров, а другую половину — в партиях против победителей. Найдите n.

Ответ: 25.

Решение. Обозначим количество победителей за k. Между собой призеры разыграли $10 \cdot 9/2 = 45$ очков, значит, в партиях против победителей призеры набрали в сумме 45 очков. Победители разыграли между собой $\dfrac{k(k-1)}{2}$ очков, значит, столько же они набрали в партиях против призеров. Всего в партиях, в которых победитель играл против призера, было разыграно $10k$ очков, поэтому $\dfrac{k(k-1)}{2} + 45 = 10k$. Решая квадратное уравнение на k, получаем возможные решения $k = 6$ и $k = 15$. Но среднее количество очков, набранное победителями, должно быть не меньше, чем среднее количество очков, набранное призерами. Поэтому $k - 1 \geqslant 9$, а значит $k = 6$ не подходит.

Приведем пример такого турнира на 25 гроссмейстеров. Пусть все партии призеров с призерами и все партии победителей с победителями зазончились вничью. Распределим очки в партиях победителей против призеров. Разобьем призеров на 5 пар произвольным образом. Пронумеруем эти пары числами $0, 1, 2, 3, 4$. Разобьем победителей на 5 троек произвольным образом. Пронумеруем эти тройки числами $0, 1, 2, 3, 4$. Пусть для каждого k призеры из k-й пары сыграли вничью с победителями из троек с номерами k, $k + 1 \mod 5$ и $k + 2 \mod 5$, и проиграли победителям из троек с номерами $k + 3 \mod 5$ и $k + 4 \mod 5$. Тогда каждый призер сыграл 9 партий вничью с призерами, 9 партий вничью с победителями и проиграл 6 партий победителям. Для призеров условие выполнено. Каждый победитель сыграл 14 партий вничью с победителями (и набрал в них 7 очков), и сделал 6 ничьих и 4 победы в партиях с призерами ($6/2 + 4 = 7$ очков). Для победителей условие также выполнено.

Итак, мы доказали, что $n = 25$ возможно, а другие значения — нет.

5.2. В шахматном турнире участвовали n гроссмейстеров. В течение турнира каждый гроссмейстер сыграл с каждым по одной партии. Каждая партия закончилась либо победой одного из игроков, либо вничью. За победу игроку начислялось 1 очко, за ничью — $1/2$ очка, за поражение — 0 очков. После турнира 10 гроссмейстеров с наибольшими суммами очков были объявлены победителями, а остальные — призерами. Оказалось, что каждый игрок набрал половину всех своих очков в партиях против призеров, а другую половину — в партиях против победителей. Найдите n.

Ответ: 16.

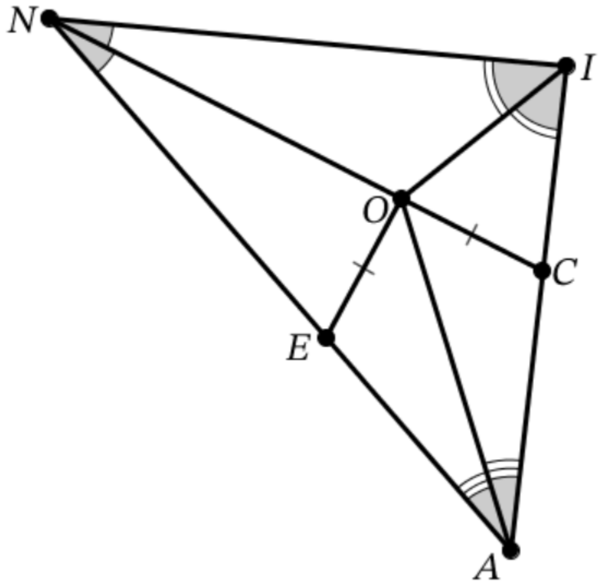
6.1. На диагонали NC выпуклого четырехугольника $NICE$ выбрана точка O. Оказалось, что $CO = EO$, $\angle EOC = 88^\circ$, $\angle NOI = 102^\circ$, а длины перпендикуляров из O к сторонам NI, IC, EN равны. Найдите угол N. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 64.

Решение. Заметим, что NO и IO — биссектрисы углов INE и NIC соответственно. Пусть $\angle ENO = \angle ONI = \alpha$, $\angle NIO = \angle OIC = \beta$.

Разберем три случая.

- Прямые NE и IC параллельны. Тогда $2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \angle NOI = 90^\circ$, что неверно по условию. Случай невозможен.
- Лучи EN и CI пересекаются. Назовем точку их пересечения A. Тогда O — центр вневписанной окружности треугольника NAI, а значит $\angle NOI = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle NAI < 90^\circ$, что неверно по условию. Случай невозможен.
- Лучи NE и IC пересекаются. Назовем точку их пересечения A.



Тогда O — центр вписанной окружности треугольника NAI, а значит $\angle NOI = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle NAI = 102^\circ$. Из того, что AO — биссектриса угла NAI, получаем $\angle OAC = 12^\circ$.

Рассмотрим четырехугольник $ACOE$. В нем $OE = OC$ и $\angle OAE = \angle OAC$, а это возможно только в двух случаях: либо $ACOE$ вписанный, либо $ACOE$ дельтоид. Но $\angle EOC + \angle EAC \neq 180^\circ$, поэтому $ACOE$ дельтоид. Из этого следует, что $\angle AOC = \frac{1}{2}\angle EOC = 44^\circ$.

Теперь по сумме углов треугольников NCI и NOI имеем:

$$\alpha + \beta + 102^\circ = 180^\circ;$$
$$\alpha + 2\beta + 44^\circ + 12^\circ = 180^\circ.$$

Решив эту систему, находим $\alpha = 32^\circ$, $\angle N = 2\alpha = 64^\circ$.

Все случаи разобраны, задача решена.

6.2. На диагонали NC выпуклого четырехугольника $NICE$ выбрана точка O. Оказалось, что $CO = EO$, $\angle EOC = 94^\circ$, $\angle NOI = 104^\circ$, а длины перпендикуляров из O к сторонам NI, IC, EN равны. Найдите угол N. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 66.

6.3. На диагонали NC выпуклого четырехугольника $NICE$ выбрана точка O. Оказалось, что $CO = EO$, $\angle EOC = 96^\circ$, $\angle NOI = 104^\circ$, а длины перпендикуляров из O к сторонам NI, IC, EN равны. Найдите угол N. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 68.

6.4. На диагонали NC выпуклого четырехугольника $NICE$ выбрана точка O. Оказалось, что $CO = EO$, $\angle EOC = 98^\circ$, $\angle NOI = 108^\circ$, а длины перпендикуляров из O к сторонам NI, IC, EN равны. Найдите угол N. Ответ выразите в градусах.

Ответ: 62.

7.1. У Артема есть набор домино. Каждая доминошка — прямоугольник 1×2, в клетках которого написаны 2 различных натуральных числа, не превосходящих 60. При этом для каждой неупорядоченной пары различных натуральных чисел, не превосходящих 60, в наборе есть единственная доминошка с такими числами. Цепочку какой наибольшей длины Артем может выложить из своих доминошек? (Цепочка из доминошек длины n — это прямоугольник $1 \times 2n$, покрытый n доминошками так, что соседние доминошки соприкасаются клетками с одинаковыми числами).

Ответ: 1741.

Решение. Рассмотрим полный граф G на 60 вершинах. Обозначим его вершины натуральными числами от 1 до 60 без повторений. Доминошке с числами k и l поставим в соответствие ребро между вершинами с числами k и l. При таком соответствии каждой доминошке соответствует ребро графа, и каждое ребро графа соответствует единственной доминошке. Рассмотрим последовательность доминошек в произвольной цепочке длины l, которую может выложить Артем. Тогда последовательность соответствущих этим доминошкам ребер образует некоторый путь (без повторений ребер) длины l в графе G. Верно и обратное: по произвольному пути (без повторений ребер) длины l в графе G строится цепочка доминошек длины l. Поэтому нас интересует путь наибольшей длины (без повторений ребер) в графе G. Рассмотрим произвольный путь A. Пусть начальная вершина пути — X, конечная — Y, и пусть граф H — подграф графа G, в котором те же вершины, а ребрами являются ребра из пути A и только они. Тогда в графе H имеется эйлеров путь из X в Y, поэтому вершины X и Y нечетной степени, а остальные вершины четной степени (либо, если $X = Y$, то все вершины четной степени). Но степени вершин графа H не превышают 59, поэтому сумма степеней вершин графа H не превосходит $2 \cdot 59 + 58 \cdot 58 = 3482$, а количество ребер не превосходит $\frac{3482}{2} = 1741$.

Покажем, что существует путь A длины 1741 (ему соответствует цепочка длины 1741). Рассмотрим подграф K графа G, получаемый удалением ребер $(1, 2), (3, 4), \ldots, (57, 58)$. В графе K вершины 59 и 60 нечетной степени, а все остальные — четной. Кроме того, очевидно что K связный, поэтому в нем существует эйлеров путь. Длина этого пути равна 1741.

7.2. У Артема есть набор домино. Каждая доминошка — прямоугольник 1×2, в клетках которого написаны 2 различных натуральных числа, не превосходящих 70. При этом для каждой неупорядоченной пары различных натуральных чисел, не превосходящих 70, в наборе есть единственная доминошка с такими числами. Цепочку какой наибольшей длины Артем может выложить из своих доминошек? (Цепочка из доминошек длины n — это прямоугольник $1 \times 2n$, покрытый n доминошками так, что соседние доминошки соприкасаются клетками с одинаковыми числами).

Ответ: 2381.

7.3. У Артема есть набор домино. Каждая доминошка — прямоугольник 1×2, в клетках которого написаны 2 различных натуральных числа, не превосходящих 80. При этом для каждой неупорядоченной пары различных натуральных чисел, не превосходящих 80, в наборе есть единственная доминошка с такими числами. Цепочку какой наибольшей длины Артем может выложить из своих доминошек? (Цепочка из доминошек длины n — это прямоугольник $1 \times 2n$, покрытый n доминошками так, что соседние доминошки соприкасаются клетками с одинаковыми числами).

Ответ: 3121.

7.4. У Артема есть набор домино. Каждая доминошка — прямоугольник 1×2, в клетках которого написаны 2 различных натуральных числа, не превосходящих 90. При этом для каждой неупорядоченной пары различных натуральных чисел, не превосходящих 90, в наборе есть единственная доминошка с такими числами. Цепочку какой наибольшей длины Артем может выложить из своих доминошек? (Цепочка из доминошек длины n — это прямоугольник $1 \times 2n$, покрытый n доминошками так, что соседние доминошки соприкасаются клетками с одинаковыми числами).

Ответ: 3961.

8.1. Многочлены равной степени с целыми коэффициентами будем называть *похожими*, если они получаются друг из друга перестановкой коэффициентов. Например, многочлены $3x^3 + x + 5$ и $5x^3 + x^2 + 3x$ похожи. При каком наибольшем k для любых похожих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ число $P(2024) - Q(2024)$ обязательно делится на k?

Ответ: 2023.

Решение. Докажем, что $P(2024) - Q(2024)$ обязательно делится на 2023. Пусть S_P и S_Q — суммы коэффициентов многочленов P и Q соответственно. Из условия следует, что $S_P = S_Q$, поэтому $P(1) = S_P = S_Q = Q(1)$. Теперь воспользуемся тем, что если $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ и $R(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то $R(a) - R(b)$ делится на $a - b$:

$$P(2024) - Q(2024) = (P(2024) - P(1)) - (Q(2024) - Q(1)) \,\vdots\, 2023.$$

Желаемая делимость установлена.

Теперь проверим, что $k > 2023$ не подходят. Для этого достаточно рассмотреть следующий пример:

$$\begin{aligned} &P(x) = x^2 + x; \\ &Q(x) = x^2 + 1; \\ &P(2024) - Q(2024) = 2023. \end{aligned}$$

8.2. Многочлены равной степени с целыми коэффициентами будем называть *похожими*, если они получаются друг из друга перестановкой коэффициентов. Например, многочлены $3x^3 + x + 5$ и $5x^3 + x^2 + 3x$ похожи. При каком наибольшем k для любых похожих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ число $P(2023) - Q(2023)$ обязательно делится на k?

Ответ: 2022.

8.3. Многочлены равной степени с целыми коэффициентами будем называть *похожими*, если они получаются друг из друга перестановкой коэффициентов. Например, многочлены $3x^3 + x + 5$ и $5x^3 + x^2 + 3x$ похожи. При каком наибольшем k для любых похожих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ число $P(1234) - Q(1234)$ обязательно делится на k?

Ответ: 1233.

8.4. Многочлены равной степени с целыми коэффициентами будем называть *похожими*, если они получаются друг из друга перестановкой коэффициентов. Например, многочлены $3x^3 + x + 5$ и $5x^3 + x^2 + 3x$ похожи. При каком наибольшем k для любых похожих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ число $P(1024) - Q(1024)$ обязательно делится на k?

Ответ: 1023.

9.1 В треугольнике CPM с прямым углом P проведена высота PA. На прямой CM выбрана точка I, а на серединном перпендикуляре к CM — точка S. Оказалось, что $AS = AI = 6$ и $SM = 11$. Найдите PI.

Ответ: 11.

Решение. Обозначим за X середину CM. Запишем теорему Пифагора для прямоугольных треугольников PAI, PAX, SXA, SXM:

$$
\begin{aligned}
&PI^2 = PA^2 + AI^2;\\
&PA^2 = PX^2 - AX^2;\\
&AX^2 = AS^2 - SX^2;\\
&SX^2 = SM^2 - XM^2.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что $PI^2 = AI^2 + PX^2 - AS^2 + SM^2 - XM^2 = SM^2 + PX^2 - XM^2$. Но так как треугольник PCM прямоугольный, то $PX = CM/2 = XM$ (медиана равна половине гипотенузы). Значит, $PI = SM$.

9.2 В треугольнике CPM с прямым углом P проведена высота PA. На прямой CM выбрана точка I, а на серединном перпендикуляре к CM — точка S. Оказалось, что $AS = AI = 9$ и $SM = 19$. Найдите PI.

Ответ: 19.

9.3 В треугольнике CPM с прямым углом P проведена высота PA. На прямой CM выбрана точка I, а на серединном перпендикуляре к CM — точка S. Оказалось, что $AS = AI = 6$ и $SM = 13$. Найдите PI.

Ответ: 13.

9.4 В треугольнике CPM с прямым углом P проведена высота PA. На прямой CM выбрана точка I, а на серединном перпендикуляре к CM — точка S. Оказалось, что $AS = AI = 8$ и $SM = 15$. Найдите PI.

Ответ: 15.

10.1. Найдите все натуральные n, имеющие такой натуральный делитель d, что $n^2 + d^2$ делится на $nd + 1$. В ответе укажите количество таких n, не превосходящих 500.

Ответ: 7.

Решение. Так как n делится на d, то $n = kd$, где k — натуральное. Тогда по условию $d^2(k^2+1)$ делится на kd^2+1, а так как $(d^2, kd^2+1) = 1$, то k^2+1 делится на kd^2+1. Значит, существует такое натуральное s, что $k^2+1 = s(kd^2+1)$. Перепишем это условие в виде $k(k - sd^2) = s - 1$. Так как s — натуральное, то $s - 1 \geqslant 0$, из чего следует, что $k \geqslant sd^2 \geqslant s$. С другой стороны, если $s > 1$, то из равенства $s - 1 = k(k - sd^2)$ следует $s > s - 1 \geqslant k$. Так как неравенства $k \geqslant s$ и $s > k$ противоречат друг другу, то $s = 1$, из чего следует $n = d^3$.

С другой стороны, если $n = d^3$, то $n^2 + d^2 = d^2(d^4 + 1) \ \vdots \ d^4 + 1 = nd + 1$, поэтому все кубы натуральных чисел подходят. Остается заметить, что количество полных кубов от 1 до 500 равно 7.

10.2. Найдите все натуральные n, имеющие такой натуральный делитель d, что $n^2 + d^2$ делится на $nd + 1$. В ответе укажите количество таких n, не превосходящих 700.

Ответ: 8.

10.3. Найдите все натуральные n, имеющие такой натуральный делитель d, что $n^2 + d^2$ делится на $nd + 1$. В ответе укажите количество таких n, не превосходящих 900.

Ответ: 9.

10.4. Найдите все натуральные n, имеющие такой натуральный делитель d, что $n^2 + d^2$ делится на $nd + 1$. В ответе укажите количество таких n, не превосходящих 1100.

Ответ: 10.

11.1. Андрей играет в игру. Ему дана табличка 83×83, изначально все ее клетки пустые. Каждым ходом Андрей выбирает пустую клеточку и вписывает в нее натуральное число от 1 до 83^2, которого еще нет в табличке. После каждого хода Андрей получает очки крутости по следующему правилу. Подсчитываются сумма чисел в строке, содержащей выбранную на последнем ходе клетку, и сумма чисел в столбце, содержащем выбранную на последнем ходе клетку. Если ни одна из этих сумм не делится на 83, то Андрей не получает очков, если ровно одна сумма делится на 83, то получает одно очко, а если обе делятся, то два очка. Какое максимальное количество очков крутости суммарно может заработать Андрей к концу игры?

Ответ: 6972.

Решение. *Оценка*: Пусть a_i — количество чисел, делящихся на 83, которые оказались написаны в i-ой строке после окончания игры. Заметим, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{83} = 83$. Докажем, что в ходе игры сумма чисел в i-ой строке делилась на 83 не более, чем $a_i + \left\lfloor \frac{83-a_i}{2} \right\rfloor$ раз. Выпишем числа, не делящиеся на 83, записанные в этой строке, именно в том порядке, в котором мы их выписывали: $x_1, x_2, \ldots, x_{83-a_i}$. Положим $S_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$. Поскольку все остальные числа в этой строке делятся на 83, в момент, когда Андрей выписал x_i, сумма чисел в этой строке давала тот же остаток при делении на 83, что и S_i. Заметим, что S_1 не делится на 83 и что для любого $j = 1, 2, \ldots, 83 - a_i - 1$ хотя бы одно из чисел S_j и S_{j+1} не делится на 83. Таким образом, было хотя бы $\left\lceil \frac{83-a_i}{2} \right\rceil$ ходов, после которых сумма чисел в этой строке не делилась на 83, а ходов, после которых делилась, было не более, чем $a_i + \left\lfloor \frac{83-a_i}{2} \right\rfloor$, что и требовалась. Просуммировав значение по всем строкам, получим, что ходов, после которых сумма в той строке, куда было поставлено число, делилась на 83, было не более

$$a_1 + \left\lfloor \frac{83-a_1}{2} \right\rfloor + a_2 + \left\lfloor \frac{83-a_2}{2} \right\rfloor + \ldots + a_{83} + \left\lfloor \frac{83-a_{83}}{2} \right\rfloor \leqslant$$

$$\leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_{83} + \frac{83-a_1}{2} + \frac{83-a_2}{2} + \ldots + \frac{83-a_{83}}{2} = 83 + \frac{83^2-83}{2} = 83 \cdot 42.$$

Проведя аналогичные рассуждения для столбцов, получим, что Андрей не может получить больше, чем $2 \cdot 83 \cdot 42 = 6972$ очков.

Пример: Покажем, как Андрею получить ровно такое количество очков. Пронумеруем числами от 0 до 82 столбцы слева направо и строки снизу вверх. Для i от 0 до 164 назовем i-ой диагональ, на которой лежат клетки с суммой координат (номеров строки и столбца) i.

Алгоритм действий Андрея таков: сначала он расставит на 82-й диагонали все числа, делящиеся на 83. Их как раз 83 — столько же, сколько и клеток на этой диагонали. Каждый такой ход принесет ему по два очка. Затем он расставит на 83-й и 0-ой диагоналях все числа, дающие остаток 1 при делении на 83. Количество чисел, которые он собирается расставить, и суммарное количество клеток в этих двух диагоналях совпадают. Ни один из этих ходов не принесет Андрею очков, но зато после всех этих ходов в каждом столбце и в каждой строке будут написаны ровно два числа, причем с суммой, дающей остаток 1 при делении на 83.

После этого Андрей расставит на 84-ой и 1-ой диагоналях все числа, дающие остаток 82 при делении на 83. Каждый такой ход принесет ему по два очка и после всех этих ходов в каждой строке и каждом столбце будет стоять по три числа, причем с суммой, делящейся на 83.

Затем Андрей проделает аналогичную послеовательность ходов еще 40 раз. Для $k = 2, \ldots, 41$ в течение k-ой итерации он сначала расставит все числа, дающие остаток k, на $(82+k)$-ой и $(k-1)$-ой диагоналях, что не принесет ему очков, а затем расставит все числа, дающие остаток $83-k$ на $(83+k)$-ой и k-ой диагоналях, за что получит суммарно 166 очка. После этого все строки и столбцы будут содержать поровну чисел и иметь сумму, деляющуюся на 83.

Итого, за время игры Андрей заработает 166 очка за расставление чисел, кратных 83, и по 166 очка за каждую из следующих 41 итерации, то есть всего 6972 очков, что и требовалось.

11.2. Андрей играет в игру. Ему дана табличка 77×77, изначально все ее клетки пустые. Каждым ходом Андрей выбирает пустую клеточку и вписывает в нее натуральное число от 1 до 77^2, которого еще нет в табличке. После каждого хода Андрей получает очки крутости по следующему правилу. Подсчитываются сумма чисел в строке, содержащей выбранную на последнем ходе клетку, и сумма чисел в столбце, содержащем выбранную на последнем ходе клетку. Если ни одна из этих сумм не делится на 77, то Андрей не получает очков, если ровно одна сумма делится на 77, то получает одно очко, а если обе делятся, то два очка. Какое максимальное количество очков крутости суммарно может заработать Андрей к концу игры?

Ответ: 6006.

11.3. Андрей играет в игру. Ему дана табличка 87×87, изначально все ее клетки пустые. Каждым ходом Андрей выбирает пустую клеточку и вписывает в нее натуральное число от 1 до 87^2, которого еще нет в табличке. После каждого хода Андрей получает очки крутости по следующему правилу. Подсчитываются сумма чисел в строке, содержащей выбранную на последнем ходе клетку, и сумма чисел в столбце, содержащем выбранную на последнем ходе клетку. Если ни одна из этих сумм не делится на 87, то Андрей не получает очков, если ровно одна сумма делится на 87, то получает одно очко, а если обе делятся, то два очка. Какое максимальное количество очков крутости суммарно может заработать Андрей к концу игры?

Ответ: 7656.

11.4. Андрей играет в игру. Ему дана табличка 91×91, изначально все ее клетки пустые. Каждым ходом Андрей выбирает пустую клеточку и вписывает в нее натуральное число от 1 до 91^2, которого еще нет в табличке. После каждого хода Андрей получает очки крутости по следующему правилу. Подсчитываются сумма чисел в строке, содержащей выбранную на последнем ходе клетку, и сумма чисел в столбце, содержащем выбранную на последнем ходе клетку. Если ни одна из этих сумм не делится на 91, то Андрей не получает очков, если ровно одна сумма делится на 91, то получает одно очко, а если обе делятся, то два очка. Какое максимальное количество очков крутости суммарно может заработать Андрей к концу игры?

Ответ: 8372.

12.1. Для вещественных чисел a, b, c, d, e, f выполняется равенство

$$a + b + c + d + e = \sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c-2} + \sqrt{d} + \sqrt{e} = f.$$

Найдите наименьшее возможное значение f.

Ответ: 4.

Решение. Введем новые обозначения. Пусть $t_1 = \sqrt{a}, t_2 = \sqrt{b}, t_3 = \sqrt{c-2}, t_4 = \sqrt{d}, t_5 = \sqrt{e}$. Перепишем равенство из условия в новых обозначениях: $t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_4^2+t_5^2+2 = t_1+t_2+2t_3+t_4+t_5$. Выделив полные квадраты, получим $(t_1 - \frac{1}{2})^2 + (t_2 - \frac{1}{2})^2 + (t_4 - \frac{1}{2})^2 + (t_5 - \frac{1}{2})^2 + (t_3 - 1)^2 = 0$, что возможно только при $t_1 = t_2 = t_4 = t_5 = 1/2, t_3 = 1$. Отсюда находим $a = b = d = e = 1/4$, $c = 3$ и $f = 4$.

12.2. Для вещественных чисел a, b, c, d, e, f выполняется равенство

$$a + b + c + d + e = \sqrt{a} + \sqrt{b} + 2\sqrt{c-2} + \sqrt{d} + \sqrt{e} = f.$$

Найдите наибольшее возможное значение f.

Ответ: 4.