Вспомиаем гомотетию

1. Прямая ℓ проходит через вершину A треугольника ABC параллельно стороне BC. Точки P и Q выбираются на отрезках AB и AC так, что $PQ \parallel BC$. Точки P' и Q' симметричны точкам P и Q относительно ℓ. Докажите, что прямые CP' и BQ' пересекаются на прямой ℓ.

2. Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы окружностей, вневписанных в треугольники ABD и ACD, касающихся соответственно отрезков BD и CD, также равны.

3. Пусть A — одна из двух различных точек пересечения двух неравных окружностей ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно. Одна из общих касательных к окружностям касается ω_1 в точке P_1 и ω_2 в точке P_2, а другая касается ω_1 в точке Q_1 и ω_2 в точке Q_2. Пусть M_1 — середина P_1Q_1, а M_2 — середина P_2Q_2. Докажите, что $\angle O_1AO_2 = \angle M_1AM_2$.

4. Дан треугольник ABC. Окружности ω_a, ω_b и ω_c вписаны в углы $\angle BAC$, $\angle ABC$ и $\angle BCA$ соответственно и касаются друг друга попарно (внешним образом). Пусть A_0, B_0 и C_0 — точки касания ω_b и ω_c; ω_a и ω_c; ω_a и ω_b. Пусть $A_1 = BC \cap B_0C_0$, $B_1 = AC \cap A_0C_0$ и $C_1 = AB \cap A_0B_0$. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

5. На описанной окружности треугольника ABC выбирается хорда XY так, что ее середина лежит на окружности Эйлера треугольника ABC. Докажите, что окружности Эйлера для всевозможных треугольников AXY касаются фиксированной окружности (не зависящей от выбора хорды XY).