Etot god

1. *(Australian MO 2024)* Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Точка P взята на прямой CB так, что $CP = CA$, а B лежит между C и P. Точка Q взята на прямой CD так, что $CQ = CA$, а D лежит между C и Q. Докажите, что центр вписанной окружности треугольника ABD лежит на прямой PQ.

2. *(Polish MO Final 2024)* Дан прямоугольник $ABCD$ с точкой X внутри. Пусть P — это пересечение биссектрис углов XBC, XAD, а Q — точка, в которой $\angle PAQ = \angle PBQ = 90°$. Покажите, что X равноудалено от P, Q.

3. *(Kyiv City MO Round 2 2024)* Пусть AH_A, BH_B, CH_C — высоты остроугольного треугольника ABC. Точки A_1 и C_1 являются проекциями точки H_B на стороны AB и BC соответственно. Пусть B_1 — это проекция B на H_AH_C. Докажите, что диаметр описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$ равен BH_B.

4. *(Bulgarian Winter Tournament 2024)* Пусть ABC — неравнобедренный остроугольный треугольник с $CA > CB$, а P — его внутренняя точка, удовлетворяющая

$$\angle APB = 180° - \angle ACB;$$

прямые AP, BP пересекаются с BC, CA в точках A_1, B_1 соответственно. Если M — середина A_1B_1, а (A_1B_1C) пересекается с (ABC) в точке Q, докажите, что $\angle PQM = \angle BQA_1$.

5. *(Taiwan TST 2024)* Для четырехугольника $ABCD$ пусть AC и BD пересекаются в E, AB и CD пересекаются в точке F, а AD и BC пересекаются в точке G. Кроме того, пусть W, X, Y и Z являются отражениями E относительно AB, BC, CD, и DA соответственно. Докажите, что одна из точек пересечения (FWY) и (GXZ) лежит на прямой FG.

6. *(Turkey TST 2024)* В неравнобедренном треугольнике ABC I является центром вписанной окружности, а O — центром описанной окружности. Прямая IO пересекает прямые BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. Пусть A_1 является точкой пересечения BE и CF. Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Вписанная окружность ABC касается сторон BC, CA, AB в точках X, Y, Z соответственно. Пусть прямые XA_1, YB_1 и ZC_1 пересекаются с IO в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что окружности диаметром AA_2, BB_2 и CC_2 имеют общую точку.