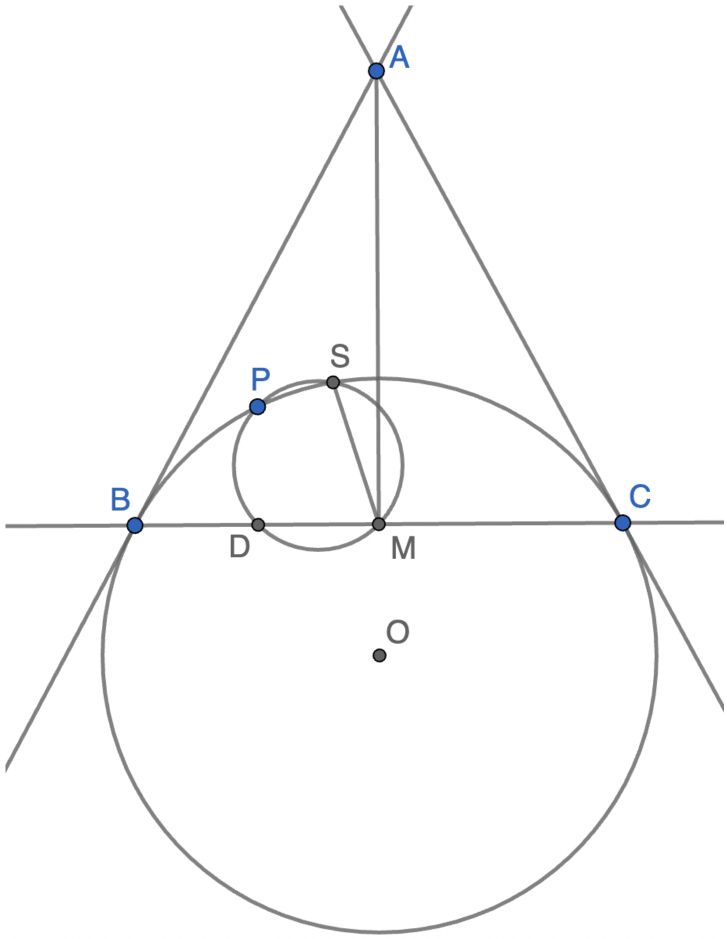
Межнарские забавы



Задачи по пунктам НЕ принимаются.

Дана окружность ω с центром в O и точка A вне нее. Пусть точки B и C на ω таковы, что AB и AC касательные к ω. Точка M — середина отрезка BC, P — произвольная точка на меньшей дуге BC окружности ω. Точка D — основание перпендикуляра из точки P на прямую BC. Пусть $S \neq P$ — точка пересечения окружностей (PDM) и (BPC).

1. Докажите, что прямая PD и прямая, симметричная SM относительно AM, пересекаются в точке, лежащей на (BPC). Обозначим эту точку через T.

2. Докажите, что
   (a) S, M, O и T лежат на одной окружности;

   (b) точки A, S и T лежат на одной прямой.

3. Докажите, что
   (a) $\angle MPC = \angle BSD$;

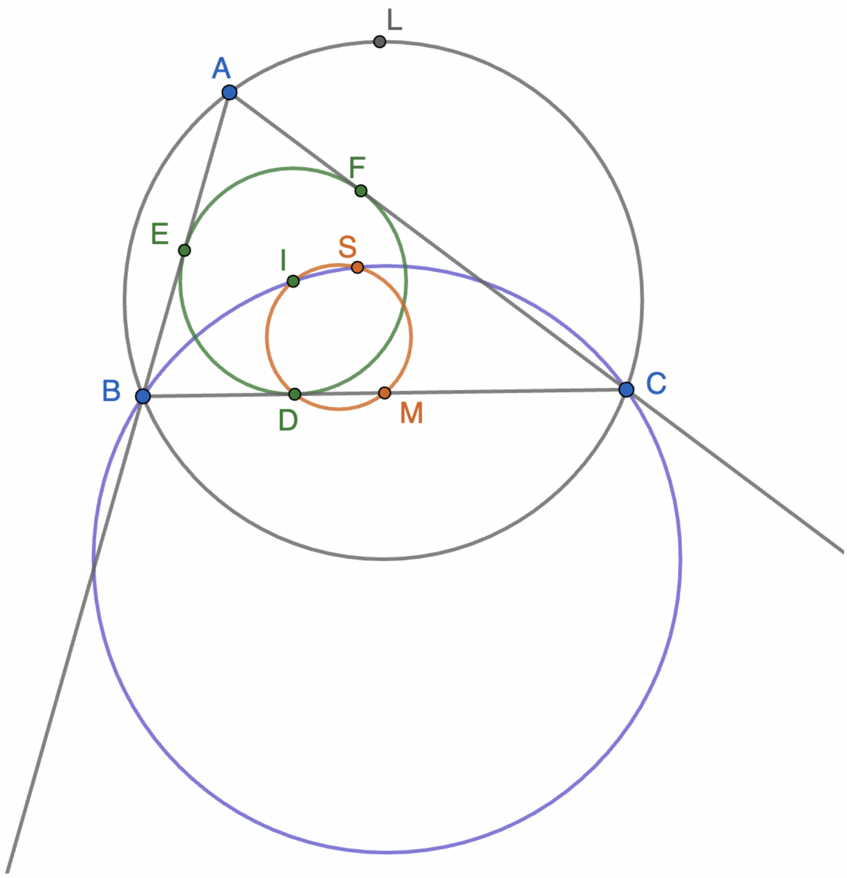
   (b) прямые AP и SD пересекаются в точке на ω. Обозначим эту точку через X.

   (c) Докажите, что прямая, симметричная DS относительно AP, пересекает PD в точке, лежащей на окружности (XTA).

Теперь сменим чертеж. См. следующую страницу.

Но прежде НУЖНО решить такую задачу по КГ.

4. Есть n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обязательно ли можно провести через них замкнутую несамопересекающуюся ломаную.



Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC. Пусть I — его инцентр, M — середина стороны BC. Вписанная окружность ω треугольника ABC касается сторон BC, AB и AC в точках D, E и F соответственно. Пусть $S \neq I$ — точка пересечения окружностей (IDM) и (BIC). Пусть L — середина большей дуги BC окружности (ABC).

5. Докажите, что точка пересечения AL и DI лежит на прямой симметричной DS относительно IL.

Пусть точка $R \neq D$ на ω такая, что $RD \perp EF$. Пусть точка $T \neq I$ на (BIC) такая, что $TI \perp BC$.

6. Докажите, что существует поворотная гомотетия с центром на окружности (ABC), переводящая треугольник ARD в треугольник LIT.

Пусть Q — отличная от R точка пересечения ω и AR. Пусть P — отличная от B точка пересечения окружностей (BEQ) и (BIC).

7. **(a)** Докажите, что прямые PQ, IL и DS пересекаются в одной точке.

(b) *(IMO-2019, p.6)* Докажите, что точка пересечения DI и AL лежит на радикальной оси окружностей (BEQ) и (CEQ).

Бонусы:

8. Докажите, что AR и LI пересекаются на (ABC) (на самом деле, для тех кто знает что это такое, точка пересечения из условия этой задачи будет являться точкой касания полувписанной окружности).

9. Докажите, что центр гомотетии из задачи 5 лежит еще и на прямых IK (где K — основание перпендикуляра на EF из D) и DN (где N — центр окружности (BIC)).