

## Погружаемся в задачу РММ

1. (Ф. Ивлев) Обозначим за  $O$  и  $I$  центры описанной и вписанной окружности треугольника  $ABC$  соответственно. Окружность  $\omega_a$  проходит через точки  $B$  и  $C$  и касается вписанной в треугольник окружности, окружности  $\omega_b$  и  $\omega_c$  определяются аналогично. Тогда радикальный центр окружностей  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  и  $\omega_c$  лежит на прямой  $OI$ .

Обозначим за  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  пересечения построенных окружностей отличные от вершин треугольника, за  $A''$ ,  $B''$  и  $C''$  точки касания этих окружностей со вписанной, за  $T_a$ ,  $T_b$  и  $T_c$  точки касания вписанной окружности со сторонами, за  $I_a$ ,  $I_b$  и  $I_c$  — центры внеписанных окружностей.

- (a) Докажите, что прямая точки  $T_a, I_a, A''$  лежат на одной прямой.
- (b) Докажите, что прямые  $T_a I_a, T_b I_b$  и  $T_c I_c$  пересекаются в одной точке.
- (c) Прямая  $T_a I_a$  пересекает  $\omega_a$  в точке  $P_a \neq A''$ , точки  $P_b$  и  $P_c$  определяются аналогично. Докажите, что треугольники  $P_a P_b P_c$  и  $T_a T_b T_c$  гомотетичны с центром в некоторой точке  $Q$ .
- (d) Покажите, что прямые  $A'' T_a, B'' T_b$  и  $C'' T_c$  пересекаются в одной точке.
- (e) Докажите, что  $O$  — центр окружности  $(P_a P_b P_c)$ , и дорешайте задачу.
2. Теперь давайте решим ту же задачу при помощи синусного счета.

(a) Для начала «отловим» отношение синусов, в котором прямая  $AA'$  делит угол  $A$ . Сделаем инверсию с центром в точке  $A$  и любыми радиусом, образ точки  $X$  будем обозначать как  $X^*$ . Прямые  $AA'^*$  и  $T_b^* T_c^*$  пересекают прямую  $B^* C^*$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно. Докажите, что  $(B^*, C^*; K, L) = -1$ .

(b) Докажите, что  $\frac{B^* K}{C^* K} = \frac{B^* L}{C^* L} = \left( \frac{B^* I^*}{C^* I^*} \right)^2$  и выразите через тригонометрические функции от половинок углов исходного треугольника отношение синусов, в котором прямая  $AK$  делит угол  $A$ .

(c) Трилинейными координатами точки  $X$  называют тройку чисел  $[x : y : z]$ , которые относятся также, как расстояния от  $X$  до сторон треугольника. Вычислите трилинейные координаты точек  $O$  и  $I$ , а также искомого радикального центра. *Hint: Подумайте, как трилинейные координаты связаны с отношением вычисленных синусов.*

(d) Убедитесь, что векторы, состоящие из трое трилинейных координат наших точек линейно зависимы и осознайте, что из этого следует утверждение задачи.