Сложный Фусс

1. Пусть ABC — остроугольный треугольник с ортоцентром H, и пусть W — точка на стороне BC, лежащая строго между B и C. Точки M и N — основания высот из B и C соответственно. Обозначим через ω_1 описанную окружность BWN, и пусть X — точка на ω_1 такая, что WX — диаметр Аналогично, обозначим ω_2 описанную окружность треугольника CWM, и пусть Y — такая точка ω_2, что WY — диаметр ω_2. Докажите, что X, Y и H — коллинеарны.

2. Пусть ω — вписанная окружность треугольника ABC. Отрезки BC и CA касаются ω в точках D,E. Прямая, проходящая через B и параллельная DE, пересекает ω в точках F и G (F ближе к B, чем G.) Прямая CG пересекает ω в точке H. А прямая, проходящая через G и параллельная EH, пересекается с AC в точке I. Прямая IF пересекается с окружностью ω в точке J. Прямые CJ и EG пересекаются в точке K. Пусть l прямая проходящая через K и параллельно JD. Докажите, что l, IF, ED пересекаются в одной точке.

3. Пусть ABC — остроугольный треугольник, точки D, E и F основания его высот, H — ортоцентр и Γ — окружность 9 точек. Обозначим за A_1 основание перпендикуляра из A на EF, аналогично определим B_1, C_1. Известно, что центр описанной окружности $A_1B_1C_1$ лежит на Γ. Докажите, что DEF — прямоугольный треугольник.

4. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, для которого выполнено условие $\angle A = \angle D$. Пусть L, M, N — середины отрезков AB, AD, CD. Обозначим за E точку пересечения прямых AC и BD. Точка F, лежащая на ME, удовлетворяет условию $ME \cdot MF = MA^2$. Докажите, что $\angle LFM = \angle MFN$.