Окружность Аполлония

1. Дан отрезок AB и положительное число k. Докажите, что при $k \neq 1$ множество точек X, удовлетворяющих условию $\dfrac{AX}{BX} = k$ это окружность, центр которой лежит на прямой AB.

2. Обозначим за Ω_a окружность, построенную как на диаметре на отрезке, соединяющем основания внешней и внутренней биссектрис треугольника ABC, проведенных из вершины A. Окружности Ω_b и Ω_c определяются аналогично.

(a) Докажите, что три построенные окружности имеют две общие точки, которые называются двумя *точками Аполлония.*

(b) Точка A_1 на прямой BC такова, что прямая A_1A касается окружности (ABC). Точки B_1 и C_1 определяются аналогично. Выведите из предыдущего пункта, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

3. Докажите, что на прямой, соединяющей две точки Аполлония треугольника лежит:

(a) Центр описанной около этого треугольника окружности.

(b) Точка Лемуана этого треугольника.

(c) Ортоцентр треугольника, вершины которого являются основаниями внутренних биссектрис треугольника.

4. **(a)** Докажите, что точки Аполлония изогонально сопряжены двум точкам Торричелли треугольника.

(b) Докажите, что проекции точки Аполлония на стороны треугольника являются вершинами равностороннего треугольника.

5. **Теорема.** В треугольнике ABC проведена тройка чевиан AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в одной точке. Прямая B_1C_1 пересекает BC в точке A_2, точки B_2 и C_2 определяются аналогично. Обозначим за Ω_a окружность, построенную на отрезке A_1A_2 как на диаметре, аналогично определим окружности Ω_b и Ω_c.

(a) Докажите, что степень центра описанной окружности треугольника (ABC) одна и та же относительно всех трех построенных окружностей.

(b) Докажите, что степень ортоцетра треугольника $A_1B_1C_1$ одинакова относительно всех трех построенных окружностей.

(c) Докажите, что середины отрезков A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 лежат на одной прямой ℓ.

(d) Докажите, что прямая, соединяющая ортоцентр треугольникика $A_1B_1C_1$ с центром описанной окружности треугольника ABC перпендикулярна прямой ℓ.

6. Дан треугольник ABC и такая точка P, что $AP : BC = BP : CA = CP : AB$. Докажите, что точка P лежит на прямой Эйлера треугольника ABC.