Первый разнобой

1. На меньшей дуге AC остроугольного треугольника ABC выбрана точка D. Точка E на отрезке AC такова, что $DE = AE$. На прямой $\ell \parallel AB$, проходящей через точку E выбирается такая точка F, что $BF = CF$. Докажите, что точки D, E, C и F лежат на одной окружности.

2. На плоскости провели несколько окружностей и отметили все точки их пересечения или касания. Может ли оказаться, что на каждой окружности лежат ровно **a)** три **b)** четыре отмеченные точки, а через каждую отмеченную точку проходят ровно **a)** три **b)** четыре окружности?

3. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке P. Окружность Ω_{AB} с центром на отрезке CD проходит через точки A и B, а окружность Ω_{CD} с центром на отрезке AB проходит через точки C и D. Докажите, что точка P лежит на прямой, проходящей через точки пересечения окружностей Ω_{AB} и Ω_{CD}.

4. В окружность Ω вписан выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Окружность ω_{AB} с центром в середине «меньшей» дуги AB проходит через точки A и B; аналогично определены окружности ω_{BC}, ω_{CD}, ω_{DE}, ω_{EA}. Окружности ω_{EA} и ω_{AB} пересекаются в точках A и A_0; аналогично определены точки B_0, C_0, D_0, E_0. Докажите, что точки пересечения продолжений пар несмежных сторон пятиугольника $A_0B_0C_0D_0E_0$ лежат на соответственных окружностях ω_{AB}, ω_{BC}, ω_{CD}, ω_{DE}, ω_{EA}.

5. На плоскости проведено 3000 прямых общего положения. Докажите, что среди частей, на которые эти прямые разбили плоскость, найдется не менее 1000 треугольников.

6. Две параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекают стороны треугольника BC, CA и AB в точках X_i, Y_i, Z_i соответственно при $i = 1, 2$. Перпендикуляры, проведенные к соответствующим сторонам треугольника через точки X_i, Y_i и Z_i, образуют два треугольника (синий и красный). Докажите, что описанные окружности этих двух треугольников касаются.