

Бесконечность — не предел!

Странный это был отдел. Лозунг у них был такой: «Познание бесконечности требует бесконечного времени». С этим я не спорил, но они делали из этого неожиданный вывод: «А потому работай не работай — все едино». И в интересах неувеличения энтропии Вселенной они не работали.

Стругацкие, «Понедельник начинается в субботу»

Простой, но важный для осознания факт: бесконечно много \neq сколь угодно много.

1. Докажите, что в ряду натуральных чисел найдётся сколь угодно много подряд идущих составных чисел. Правда ли, что найдётся бесконечно много составных подряд идущих чисел?
2. В стране Фибоначчи есть купюры достоинством 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 лир. У Леонардо есть купюра 55 лир. Каждый день он может пойти в банк и обменять любую имеющуюся у него купюру на любое количество купюр меньшего достоинства. Кроме того, каждый день Леонардо должен тратить 1 лиру на еду. Сможет ли Леонардо существовать сколь угодно долго? А бесконечно долго?
3. Натуральные числа раскрасили в два цвета. Обязательно ли существует одноцветная бесконечная арифметическая прогрессия?
4. Всеволод и Максим по очереди выписывают цифры бесконечной десятичной дроби. Всеволод своим ходом приписывает в хвост любое конечное число цифр, а Максим — одну. Если в итоге получится чисто периодическая дробь (без предпериода), выигрывает Всеволод, иначе — Максим. Кто имеет выигрышную стратегию? (*Но перед тем, как рашеть задачу, осознайте, что значит «в итоге», и почему так вообще корректно говорить.*)
5. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей различного роста.
 - (а) Пусть рост каждого богатыря составляет целое число сантиметров. Докажите, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания.
 - (б) Пусть рост каждого богатыря не обязательно является целым. Докажите, что Черномор может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечное число богатырей, стоящих в порядке возрастания или убывания.
6. **Лемма Кёнига.** Докажите, что в бесконечном дереве, степень каждой вершины

которого конечна, найдётся бесконечный путь.

7. Допустим, что любую конечную карту можно правильным образом раскрасить в 4 цвета (то есть так, чтобы любые две страны, имеющие общий кусок границы ненулевой длины, были покрашены в разные цвета). Докажите, что тогда и бесконечную карту можно правильным образом раскрасить в 4 цвета.
8. В стране роботов любые конечные или бесконечные последовательности из 0 и 1 называются словами. Некоторые конечные слова объявлены *матерными*. Слово называется *цензурным*, если оно не содержит матерных подслов.
 - (a) Известно, что существуют сколь угодно длинные конечные цензурные слова. Докажите, что существует бесконечное цензурное слово.
 - (b) Известно, что матерных слов конечное число и существует бесконечное цензурное слово. Докажите, что существует бесконечное периодическое цензурное слово.
 - (c) Останется ли верным утверждение предыдущего пункта, если снять ограничение на конечность множества матерных слов?