

## Алгебраический разнбой

- Докажите, что любая функция представляется в виде
  - суммы чётной и нечётной функции;
  - суммы двух функций, графики которых центрально-симметричны (возможно, относительно различных точек).
- Графики двух квадратных трёхчленов пересекаются в двух точках. В обеих точках касательные к графикам перпендикулярны. Верно ли, что оси симметрии графиков совпадают?
- Найдите все корни уравнения

$$1 - x + \frac{x(x-1)}{2!} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{n!} = 0.$$

- Известно, что число  $a$  положительно, а неравенство  $10 < a^x < 100$  имеет ровно пять решений в натуральных числах. Сколько таких решений может иметь неравенство  $100 < a^x < 1000$ ?
- Что больше:  $e^\pi$  или  $\pi^e$ ?
- Целые ненулевые числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  таковы, что равенство

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n + \frac{1}{x}}}}} = x$$

выполнено при всех целых значениях  $x$ , входящих в область определения дроби, стоящей в левой части.

- Докажите, что число  $n$  чётно.
  - При каком наименьшем  $n$  такие числа существуют?
- Можно ли представить функцию  $e^x$  в виде суммы нескольких периодических функций?