

Ушастая геометрия

1. На сторонах остроугольного треугольника ABC во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABC_1 , BCA_1 , ACB_1 .
 - (а) Докажите, что длины отрезков AA_1 , BB_1 и CC_1 равны.
 - (б) Докажите, что описанные окружности этих треугольников пересекаются в одной точке.
 - (в) Докажите, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке T .
 - (д) Докажите, что сумма расстояний от точки X до вершин треугольника минимальна тогда и только тогда, когда $X = T$.
 - (е) Докажите, что центры построенных треугольников образуют правильный треугольник.
 - (ф) Докажите, что отрезки, соединяющие вершины треугольника ABC с центрами соответствующих правильных треугольников, пересекаются в одной точке.
 - (г) Докажите, что прямая, соединяющая точку A с центром треугольника BCA_1 , перпендикулярна прямой B_1C_1 .
2. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC построены квадраты $ABPQ$ и $ACMN$.
 - (а) Докажите, что медиана треугольника ABC , проведённая из вершины A , перпендикулярна прямой QN .
 - (б) Докажите, что центры квадратов и середины отрезков BC и QN образуют квадрат.
 - (в) Пусть X — центр квадрата, построенного на стороне BC ввне треугольника ABC . Докажите, что отрезки AH , PM , QC , BN пересекаются в одной точке.
 - (д) Пусть угол A прямой. Пусть H — основание высоты из A на BC . Докажите, что $\angle PHN = 90^\circ$.
 - (е) Проведём через точки P и M перпендикуляры к прямым AC и AB соответственно. Докажите, что их точка пересечения лежит на высоте треугольника ABC , проведённой из вершины A .
 - (ф) Докажите, что отрезки BM и CP пересекаются на высоте треугольника ABC , проведённой из вершины A .
3. На сторонах серого треугольника построили квадраты. Вершины этих квадратов соединили, получив красные треугольники, а на построенных отрезках построили квадраты. Вершины новых квадратов соединили, получив синие четырёхугольники. Прделав то же самое, получили зелёные четырёхугольники и т.д.
 - (а) Докажите, что синие четырёхугольники являются трапециями.
 - (б) Докажите, что все одноцветные четырёхугольники имеют одинаковую пло-

щадь.

