

## Многочлены Чебышёва

1. Докажите, что  $\cos n\varphi$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) представляется как многочлен от  $\cos \varphi$ , причём если  $T_n(x)$  — тот самый многочлен, где  $x = \cos \varphi$ , то

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

**Определение.** Многочлен  $T_n(x)$  ( $n \geq 0$ ) называется *многочленом Чебышёва*.

Иногда вместо многочленов  $T_n(x)$  удобно рассматривать многочлены  $Q_n(x) = 2T_n(x/2)$ .

2. Докажите, что  $T_n(x)$  и  $Q_n(x)$  — многочлены с целыми коэффициентами, причём старший коэффициент  $Q_n(x)$  равен 1.
3. Докажите, что  $T_n(T_m(x)) = T_m(T_n(x))$ .
4. (а) Докажите, что  $\sin n\varphi$  не всегда представляется как многочлен от  $\sin \varphi$ . При каких  $n$  представляется?  
 (б) Докажите, что  $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}$  представляется как многочлен  $U_n(x)$  степени  $n$  от  $\cos \varphi$ . Какому рекуррентному соотношению удовлетворяют многочлены  $U_n(x)$ ?

5. Вычислите значение выражений

$$(a) \cos \frac{\pi}{2n} \cdot \cos \frac{3\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}; \quad (b) \cos \frac{\pi}{2n+1} \cdot \cos \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \dots \cdot \cos \frac{n\pi}{2n+1}$$

6. Рассмотрим приведённый многочлен  $P(x)$  степени  $n$ , для которого величина

$$\max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$$

минимальна. Докажите, что  $P(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ .

*Подсказка: рассмотрите точки, в которых  $|T_n(x)| = 1$ .*

7. Докажите, что существует многочлен  $P(x)$  степени  $n$  такой, что

$$a^n + \frac{1}{a^n} = P\left(a + \frac{1}{a}\right).$$

Что это за многочлен?

8. (а) Докажите, что  $\cos 20^\circ$  — иррациональное число.

(б) Докажите, что если  $\cos\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{m}{n}$ , где  $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$ ,  $(m, n) = 1$ , то  $n$  является степенью двойки (возможно, нулевой).

(с) Докажите, что на самом деле  $\frac{m}{n}$  может равняться только одному из чисел  $0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ .

(д) Выведите отсюда, что при  $n \neq 4$  не существует правильного  $n$ -угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.