

Непростая индукция. Добавка

1. Дан связный граф с n вершинами. В каждой его вершине есть сколько-то монет. Разрешается за одну операцию переложить сколько угодно монет из одной вершины в соседнюю. Докажите, что можно за $n - 1$ операцию получить любое другое наперёд заданное расположение монет.
2. В группе детского сада каждый ребёнок принёс с собой несколько конфет: первый — 1 конфету, второй — 2 конфеты, ..., сотый — 2^{99} конфет. Злая воспитательница предложила разделить конфеты «по справедливости». Воспитательница может подойти к любым двум детям и разделить их конфеты между ними пополам. Если при этом у них суммарно нечётное количество конфет, то одну конфету она съедает. Воспитательница продолжает так делать, пока у всех детей не станет поровну конфет. Какое наибольшее количество конфет может съесть воспитательница?
3. Докажите, что при $n > 2$ число $n!$ можно представить в виде суммы n различных делителей числа $n!$.
4. В каждой клетке таблицы 1000×1000 стоит ноль или единица. Докажите, что можно либо вычеркнуть 990 строк так, что каждом столбце будет хотя бы одна невычеркнутая единица, либо вычеркнуть 990 столбцов так, что в каждой строке будет хотя бы один невычеркнутый ноль.