

Комбинаторный разбой

1. Сколько существует четырехзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры четны?
2. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы 8×8 . Одним ходом разрешается закрасить одну или несколько клеток, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце таблицы. Клетки, закрашенные ранее, закрашивать вторично запрещается. Проигравшим считается тот из игроков, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?
3. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень общее число женихов и невест не превосходит половины от общего числа женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих молодых людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.
4. Девять гирек расположены по кругу. Известно, что одна из них имеет массу 1 г, а за ней последовательно по ходу часовой стрелки расположены гири массами 2 г, 3 г, ..., 9 г. Размеры гирек одинаковы, и других гирек нет. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах определить гирьку массой 1 г?
5. Двадцать восемь контрольных пунктов секретного объекта соединены системой коридоров (см. рис.). Каждый коридор соединяет два пункта и может быть освещен или затемнен. Первоначально весь объект затемнен. На каждом контрольном пункте есть переключатель, меняющий освещенность всех подходящих к нему коридоров на противоположную. Начальник охраны ходит по объекту и в некоторых контрольных пунктах меняет освещенность. Какое наибольшее количество коридоров он может сделать освещенными?

