

## Алгебраический разнойбой

1. Рассматривается последовательность натуральных чисел  $2, 6, 30, \dots$ , в которой  $k$ -й член есть произведение первых  $k$  простых чисел,  $k = 1, 2, \dots$ . Известно, что разность некоторых двух чисел этой последовательности равна 30000. Найдите эти числа.
2. Король приказал чеканить монеты так, чтобы любую целую сумму можно было набрать не более чем десятью монетами. Сначала были выпущены монеты в наименьшую возможную сумму — 1 крона. Затем на каждом следующем шаге казначей определяет наименьшую целую сумму, которую нельзя набрать в соответствии с приказом, и выпускает монету в эту сумму. Какие монеты будут выпущены в королевстве?
3. Найдите наименьшее целое  $a$ , при котором для всех действительных  $x$  выполняется неравенство  $x^4 + 2x^2 + a \geq 4x$ .
4. Три друга гонят самогон, каждый своим аппаратом. У Труса течет жидкость крепостью  $a$  градусов, и стандартная бутылка наполняется за  $a$  часов, у Балбеса соответственно  $b$  градусов и за  $b$  часов, у Бывалого —  $c$  градусов и за  $c$  часов. Для ускорения процесса дружья направили все шланги в одну бутылку и наполнили ее за сутки. Какова крепость смеси? (*Крепость — это процент содержания спирта.*)
5. Существует ли многочлен  $P(x)$  2021-й степени, такой, что  $P(x^2 - 1)$  делится на  $P(x)$ ?
6. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника. Докажите неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$