

## Деревья

*Дерево* — связный граф без циклов.

1. Докажите, что при удалении любого ребра из дерева оно превращается в несвязный граф.
2. Докажите, что из связного графа можно выкинуть несколько ребер так, чтобы осталось дерево.
3. Докажите, что в дереве с  $n$  вершинами ровно  $(n - 1)$  ребер.
4. Вершина называется *висячей*, если из нее выходит ровно одно ребро. Докажите, что в дереве не меньше двух висячих вершин.
5. Докажите, что в связном графе из  $n$  вершин не меньше  $(n - 1)$  ребер.
6. Докажите, что для любого набора чисел  $0 < d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  такого, что  $d_1 + \dots + d_n = 2n - 2$ , найдется дерево, где степени вершин будут  $d_1, \dots, d_n$ .
7. А единственно ли дерево из предыдущей задачи?
8. Может ли у графа быть ровно два остовных дерева?
9. В группе каждый имеет знакомого. Докажите, что эту группу можно разбить на две так, чтобы каждый человек имел знакомого из другой группы.
10. В дереве все вершины были занумерованы числами от 1 до  $n$ . Нумерацию поменяли, но оказалось, что если вершины  $i$  и  $j$  смежны, то они и раньше были смежны. Докажите, что найдется либо вершина, номер которой не изменился, либо ребро, у которого набор номеров концов остался таким же.
11. В графе есть остовное дерево с  $t$  висячими вершинами и остовное дерево с  $n$  висячими вершинами. Докажите, что для всякого  $k$  такого, что  $t < k < n$ , найдется остовное дерево с  $k$  висячими вершинами.