Ищем окружности

1. AH — высота остроугольного треугольника ABC, K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC. Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.

2. На плоскости даны прямая ℓ две точки A и B по одну сторону от прямой. На прямой ℓ выбрана точка M, сумма расстояний от которой до A и B наименьшая, и точка N, для которой расстояния до точек A и B равны: $AN = BN$. Докажите, что точки A, B, M, N лежат на одной окружности.

3. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD — точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

4. **(a)** Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

(b) Докажите, что A, C, H и проекция H на медиану треугольника, выходящую из вершины B, лежат на одной окружности.

5. Дан треугольник ABC. На продолжениях сторон AB и CB за точку B взяты точки C_1 и A_1 соответственно так, что $AC = A_1C = AC_1$. Докажите, что описанные окружности треугольников ABA_1 и CBC_1 пересекаются на биссектрисе угла B.

6. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.