Бесконечность — не предел! – 2

Со вкусом геометрии

1. **(a)** Можно ли покрыть прямую с помощью 2020 кругов?

(b) Можно ли покрыть плоскость с помощью 2020 полос (полоса — это часть плоскости между параллельными прямыми)?

(c) Можно ли покрыть плоскость внутренностями конечного числа парабол? Параболы можно поворачивать

2. Есть некоторый набор углов. Можно ли их внутренностями покрыть плоскость, если

(a) углов конечно и их суммарная градусная мера равна 1°;

(b) углов бесконечно и их суммарная градусная мера равна 1°;

(c) углов конечно и их суммарная градусная мера меньше 360°?

3. **(a)** В бесконечной последовательности бумажных прямоугольников площадь n-го прямоугольника равна n^2. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость? Наложения допускаются.

(b) Дана бесконечная последовательность бумажных квадратов. Обязательно ли можно покрыть ими плоскость (наложения допускаются), если известно, что для любого числа N найдутся квадраты суммарной площади больше N?

Просто задачи

4. Натуральные числа разбили на несколько арифметических прогрессий, разности которых равны $d_1, d_2, \ldots$

(a) Пусть прогрессий конечное число. Докажите, что $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} + \ldots = 1$.

(b) Верно ли утверждение предыдущего пункта, если прогрессий бесконечное число?

5. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 метров. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a метров у себя и на b метров у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов один и тот же, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый), если при этом число заклинаний в наборе

(a) конечно; **(b)** бесконечно?

6.* Мудрецы выстроены в бесконечный ряд. На каждом — колпак одного из двух цветов. Каждый мудрец знает свой номер в ряду и видит всех мудрецов с большими номерами. Мудрецы по команде должны одновременно назвать предполагаемый цвет своего колпака. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о стратегии так, чтобы при любой расстановке колпаков не угадало цвет своего колпака лишь конечное число мудрецов.