Гидроксид геометрии

В треугольнике ABC отмечены центр описанной окружности O и ортоцентр (точка пересечения высот) H.

Лемма 1. Прямые AO и AH переходят друг в друга при симметрии угла A.

1. **(a)** Докажите лемму 1 для остроугольного треугольника.
(b) Докажите лемму 1 для тупоугольного треугольника с тупым углом A.
(c) Докажите лемму 1 для тупоугольного треугольника с острым углом A.

Лемма 2. Верно векторное равенство $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$.

2. **(a)** Докажите, что $\overline{OB} + \overline{OC} \perp BC$.
(b) Докажите, что $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} - \overline{OH} \perp BC$.
(c) Докажите лемму 2.

3. **(a)** Пусть M — середина BC. Докажите, что $\overline{AH} = 2 \cdot \overline{OM}$.
(b) Пусть фиксированы точки B и C и окружность, через них проходящая, а точка A бегает по этой окружности. Найдите кривую, по которой бегает H.

И ещё.

4. **(a)** Точку H отразили относительно стороны BC и получили точку A_0. Докажите, что A_0 лежит на описанной окружности ABC.
(b) Точку H отразили относительно середины стороны BC и получили точку A_1. Докажите, что A_1 лежит на описанной окружности ABC, причем AA_1 — диаметр.

И задачи.

5. Восстановите треугольник по данным A, O и H. (Сколько решений в зависимости от расположения точек?)

6. Проведем высоты BB_1 и CC_1. Докажите, что прямая AO содержит высоту треугольника AB_1C_1, а прямая AH содержит центр описанной окружности этого треугольника.

7. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Перпендикуляр, опущенный из B на прямую AD, пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке E, отличной от B. Докажите, что точки A, E и центр описанной окружности O треугольника ABC лежат на одной прямой.

8. Найдите углы остроугольного треугольника ABC, если известно, что его биссектриса AD равна стороне AC и перпендикулярна отрезку OH, где O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC.