Зацикливание и периодичность

1. **(a)** На доске отмечено несколько точек. Из каждой точки проведена ровно одна стрелка в какую-то из других точек. Докажите, что, начав из какой-то точки и двигаясь по стрелкам, рано или поздно начнешь ходить по циклу.
   (b) Докажите, что если в каждую из точек ведет ровно одна стрелка, то, начав из любой точки, рано или поздно попадешь в неё снова.

2. Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая (возможно, с предпериодом), причем длина периода не больше **(a)** 10000; **(b)** 625.

3. Кубик Рубика выведен из собранного состояния некоторой комбинацией поворотов. Докажите, что его можно вернуть в собранное состояние, выполнив эту комбинацию ещё несколько раз.

4. Последовательность действительных чисел $\{x_n\}$ такова, что $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ и $x_{n+1} = 1-|1-2x_n|$. Докажите, что эта последовательность периодическая (возможно, с предпериодом) тогда и только тогда, когда $x_1 \in \mathbb{Q}$.

5. Известно, что $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – чисто периодические последовательности действительных чисел с минимальными длинами периода 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода последовательности $\{a_n + b_n\}$?

6. Периоды двух последовательностей действительных чисел равны 7 и 13. Какова максимальная длина начального куска, который может у них совпадать?

7. Последовательность натуральных чисел $\{a_n\}$ определена следующим образом: a_{n+1} больше a_n на последнюю цифру a_n. Докажите, что если a_1 не делится на 5, то эта последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.

8. На проволоку в форме окружности насажено несколько разноцветных шариков. В некоторый момент шарики начинают двигаться с одинаковыми скоростями: некоторые по часовой стрелке, а некоторые против. Сталкиваясь, шарики разлетаются с теми же скоростями в противоположные стороны. Докажите, что рано или поздно расположение шариков на окружности повторится с исходным.

9. По кругу расставлено несколько коробочек. В каждой из них может лежать один или несколько шариков (или она может быть пустой). За один ход разрешается взять все шарики из любой коробочки и разложить их, двигаясь по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки, кладя в каждую коробочку по одному шарику.
   (a) Докажите, что если на каждом следующем ходе шарики берут из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходе, то в какой-то момент повторится начальное размещение шариков.
   (b) Докажите, что за несколько ходов из любого начального размещения шариков по коробочкам можно получить любое другое.