

Комплексные числа в геометрии

В этом листочке можно и нужно пользоваться задачами предыдущего листочка! Решать без комплексных чисел запрещается.

Разбор: На сторонах треугольника во внешнюю сторону построены правильные треугольники. Докажите, что их центры тоже образуют правильный треугольник.

1. Точки A и B симметричны относительно центра окружности ω . Докажите, что для любой точки окружности $M \in \omega$ выражение $MA^2 + MB^2$ — одно и то же.
Подсказка: введите удобные координаты.
2. (а) Пусть точка A имеет комплексную координату a . Какой станет ее координата после поворота на 90° (против часовой стрелки) вокруг центра координат?
(б) при повороте на угол α вокруг произвольной точки B с координатой b ?
Напомним, что точка A при повороте переходит в точку A_1 , если угол между BA, BA_1 (против часовой стрелки) равен α и $BA = BA_1$.
3. На сторонах треугольника ABC построены квадраты $ABXP$ и $ACYQ$. Докажите, что медиана AM исходного треугольника
(а) перпендикулярна PQ ;
(б) в два раза больше PQ .
Подсказка: воспользуйтесь результатами 1.б.
4. На сторонах выпуклого четырёхугольника вовне построили квадраты. Докажите, что отрезки, соединяющие центры квадратов, построенных на противоположных сторонах, равны по длине и перпендикулярны.
5. Докажите, что при отражении ортоцентра треугольника относительно середины его стороны, полученная точка попадает на описанную окружность этого треугольника.
Подсказка: вспомните координаты ортоцентра треугольника, вписанного в единичную окружность.
6. На столе лежал проволочный треугольник с углами $x^\circ, y^\circ, z^\circ$. Хулиган Коля согнул каждую сторону треугольника на один градус, в результате чего получился невыпуклый шестиугольник с внутренними углами $(x-1)^\circ, 181^\circ, (y-1)^\circ, 181^\circ, (z-1)^\circ, 181^\circ$. Докажите, что точки сгиба делили стороны исходного треугольника в одном и том же отношении.