

Комплексные числа в геометрии

Некоторые полезные факты про геометрию в комплексных числах:

- Если A и B имеют координаты a и b , то вектор \overrightarrow{AB} будет иметь координаты $(b - a)$;
- Любому вектору можно сопоставить комплексную координату. При сложении векторов их координаты складываются.
- При умножении комплексных чисел аргументы складываются, а модули перемножаются.
- Уравнение окружности с центром в комплексной точке z_0 и радиусом R записывается как $R^2 = |z - z_0|^2$ или же $z\bar{z} + z_0\bar{z}_0 - z\bar{z}_0 - z_0\bar{z}$.

1. Точки A и B имеют координаты a и b , соответственно. Найдите координаты точки K , делящей отрезок AB **(а)** пополам; **(б)** в отношении $a_1 : b_1$.
2. В треугольнике ABC с координатами вершин a, b, c посчитайте координаты точки пересечения медиан.
3. Пусть A, B, C, D – точки на комплексной плоскости с координатами a, b, c, d . Покажите, что аргумент числа $\frac{b-a}{d-c}$ совпадает с углом между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{CD} (угол считается против часовой стрелки).
4. Пусть A, B, C, D – точки на комплексной плоскости с координатами a, b, c, d . Покажите, что:
 - (а)** $AB \parallel CD$ тогда и только тогда, когда $\frac{b-a}{d-c} \in \mathbb{R}$;
 - (б)** $AB \perp CD$ тогда и только тогда, когда $\frac{b-a}{d-c} \in i\mathbb{R}$.
5. **(а)** Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, когда $\frac{b-a}{a-c} \in \mathbb{R}$;
(б) Выведите из предыдущего пункта уравнение прямой, проходящей через точки A и B .
6. Покажите, что четыре комплексные точки A, B, C, D лежат на одной окружности или на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{a-b}{b-c} : \frac{a-d}{d-c} \in \mathbb{R}$.
7. **(а)** В треугольнике ABC с координатами a, b, c вершины лежат на единичной окружности с центром в нуле. Докажите, что координаты ортоцентра H — $a + b + c$.
(б) Докажите, что в произвольном треугольнике ABC точки O, M, H лежат на одной прямой, причем $OM = 2MH$.