

Геометрия масс

Центром масс точек Z_1, Z_2, \dots, Z_n с весами m_1, m_2, \dots, m_n называют такую точку O , что

$$m_1 \overrightarrow{OZ_1} + m_2 \overrightarrow{OZ_2} + \dots + m_n \overrightarrow{OZ_n} = 0$$

Центр масс существует и единственен (вспоминайте разбор!)

Если заменить некоторое подмножество точек на их центр масс с массой, равной сумме масс этих точек, то центр масс всей системы не изменится.

- Докажите, что три медианы в треугольнике пересекаются в одной точке (неожиданно, **центре масс**) и делятся точкой пересечения как 2:1, считая от вершины.
- Докажите, что три биссектрисы пересекаются в одной точке. В каком отношении делятся они точкой пересечения, если стороны треугольника равны a, b и c ?
- В треугольнике ABC проведена медиана AM , точка P — её середина. Прямая BP пересекает сторону AC в точке E . Найдите, в каком отношении точка E делит AC .
- На сторонах шестиугольника последовательно отмечены середины сторон M_1, \dots, M_6 . Всегда ли точка пересечения медиан треугольника $M_1M_3M_5$ будет совпадать с точкой пересечения медиан $M_2M_4M_6$?
- Даны точки A, B, C, D такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Пусть A_1 — точка пересечения медиан BCD , B_1 — точка пересечения медиан ACD и т.д. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 пересекаются в одной точке.
- На сторонах выпуклого четырехугольника AB, BC, CD, DA взяты точки K, L, M, N соответственно, причем $AK : KB = DM : MC = \alpha, AN : ND = BL : LC = \beta$. Пусть P — точка пересечения KM и LN . В каком отношении делит P отрезки KM и LN ?
- Докажите теорему Чевы, используя геометрию масс.
Три чевианы AA', BB', CC' треугольника ABC проходят через одну точку тогда и только тогда, когда: $\frac{|BA'|}{|A'C|} \cdot \frac{|CB'|}{|B'A|} \cdot \frac{|AC'|}{|C'B|} = 1$.
- Точка Нагеля** — точка пересечения отрезков, соединяющих вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с соответствующими вневписанными окружностями. Докажите, что точка Нагеля N , центр вписанной окружности I и центр масс M лежат на одной прямой, причем $NM = 2MI$.