Многочлены деления круга

Особый интерес представляют **корни n степени из 1**, то есть n корней многочлена $x^n - 1$.

Эти корни имеют вид $\varepsilon_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, где $k = 1, \dots n$.

На комплексной плоскости корни лежат в вершинах правильного n угольника с центром в 0.

1. **(a)** Пусть $\varepsilon_1, \dots \varepsilon_n$ — корни n-ной степени из 1. Покажите, что их сумма равна 0.
(b) Чему равно их произведение?

2. **(a)** Вычислите $(2 - \varepsilon_1) \dots (2 - \varepsilon_n)$;
(b) Пусть $\varepsilon_1 = 1$. Вычислите $(1 - \varepsilon_2) \dots (1 - \varepsilon_n)$.

3. **(a)** На плоскости нарисовали правильный 17-угольник. Докажите, что сумма всех векторов, проведенных от центра многоугольника до его вершин, равна 0.
(b) Чему равно произведение длин всех диагоналей, проведенных из одной из вершин, если расстояние от центра до вершин 17-угольника равно 1?

Корень n-ной степени из 1 называется **примитивным**, если он не является корнем из 1 никакой меньшей степени.

Многочлен $\Phi_n(x) = (x - e_1) \dots (x - e_k)$, где e_i — примитивные корни n степени, называется **многочленом деления круга**.

4. **(a)** Посчитайте $\Phi_n(x)$ при $x < 6$.
(b) Выведите формулу для $\Phi_p(x)$, где p – простое.

5. **(a)** Покажите, что $x^n - 1 = \prod\limits_{n \,\vdots\, d} \Phi_d(x)$.
(b) Посчитайте многочлен деления круга для $n = 15$.

6. Докажите, что коэффициенты $\Phi_n(x)$ симметричны относительно середины.