Комплексные числа. Тригонометрическая запись.

Напомним, что **модулем** комплексного числа называется $|z| = \sqrt{(\text{Re}z)^2 + (\text{Im}z)^2}$.

Каждое комплексное число z можно представить в виде $z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ для какого-то $\alpha \in \mathbb{R}$, причем α определено с точностью до прибавления 2π. Угол α называется **аргументом** комплексного числа z.

На комплексной плоскости модуль z – это расстояние от z до нуля, а аргумент – это угол между осью абсцисс и отрезком, соединяющим 0 и z.

1. Запишите в тригонометрическом виде: **(a)** 5 **(b)** $1 + i\sqrt{3}$; **(c)** $5 - 5i$.
2. Докажите, что при перемножении комплексных чисел **(a)** модули перемножаются; **(b)** аргументы складываются.
3. Докажите, что у частного двух комплексных чисел модуль равен частному их модулей, а аргумент – разности их аргументов.
4. Докажите **формулу Муавра**: $(r(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = r^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$;
5. Вычислите **(a)** $(1 + \sqrt{3}i)^{2021}$; **(b)** $\sqrt{1+i}$.
6. Пользуясь формулой Муавра, найдите формулу для $\sin 7\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.
7. Пользуясь формулой Муавра, найдите тригонометрическую запись всех корней n-ной степени из комплексного числа $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Сколько получилось корней?
8. Известно, что $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Покажите, что $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$.
9. Найдите все комплексные корни уравнения

$$(x+i)^{2020} + (x-i)^{2020} = 0$$

По этому листику есть добавка.