Комплексные числа

Комплексным числом называется число вида $z = a + bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$ и числа $a, b \in \mathbb{R}$. Арифметические действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом условия на i.

Множество всех комлексных чисел обозначется за $\mathbb{C}$. Число i называют **мнимой единицей**, а числа a, b – действительной и мнимой частью комплексного числа и обозначаются как **a = Re z, b = Im z**.

1. Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Докажите, что:
   (a) $x + y, xy \in \mathbb{C}$;
   (b) $\dfrac{x}{y} \in \mathbb{C}$, если $y \neq 0$.

2. Решите уравнения в комплексных числах:
   (a) $x^2 + 16 = 0$;
   (b) $x^2 - x(2i + 2) + (2i - 1) = 0$;
   (c) $x^3 - 1 = 0$.

Числа $a + ib$ и $a - ib$ называются **сопряженными**. Число, сопряженное к числу z, обозначается как $\overline{z}$.
Модулем комлексного числа $z = a + ib$ называется число $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

3. **(a)** Докажите, что $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$, $\overline{xy} = \overline{x}\overline{y}$, $\overline{x/y} = \overline{x}/\overline{y}$, $\overline{x^n} = (\overline{x})^n$
   (b) $\mathrm{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\mathrm{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$, $z\overline{z} = |z|^2$.

4. Докажите, что если $z \in \mathbb{C}$ является корнем многочлена с рациональными коэфициентами, то и $\overline{z}$ является его корнем.

Рассмотрим плоскость с обычными декартовыми координатами. Тогда каждому комплексному числу $z = a + ib$ можно сопоставить точку плоскости с координатами (a, b). Поэтому все комплексные числа можно воспринимать как точки плоскости. Такое представление называется **комплексной плоскостью**.

Полезно бывает подумать о комплексных числах геометрически.

5. Изобразите на комплексной плоскости множество точек
   (a) $|z| = 1$; **(b)** $|z - 2i - 3| = 2$.

6. Покажите, что $|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2|$.

7. Про три комплексных числа известно, что $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Докажите, что на комплексной плоскости эти точки образуют равносторонний треугольник.