Формула включений-исключений

Формула связывает количество элементов в объединении множеств и количество элементов в пересечениях поднаборов множеств.
$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_i |A_i| - \sum_{i,j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i,j,k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$

В частности, для случаев 2 и 3 множеств формула выглядит как:
$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$
$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3|) - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

1. На зачете были предложены три задачи: одна по алгебре, одна по геометрии, одна по комбе. Из 20 участников зачета задачу по алгебре решили 16, по геометрии — 14, по комбе — 12. При этом, задачи по алгебре и геометрии решило 10 человек, по алгебре и комбе – 12, по геометрии и комбе — 8. А 3 экзаменующихся решили все задачи. Сколько человек не решили ни одной задачи?

2. Посчитайте количество чисел от 1 до 1000, кратных 7, 11 или 13.

3. **(a)** Докажите формулу включений-исключений **по индукции**.
(b) Докажите формулу другим путём; пусть элемент a входит ровно в k множеств A_i. Покажите, что в левой и правой части мы посчитали его одинаковое количество раз.

4. Внутри фигуры площади 6 расположено три многоугольника площади не менее 3 каждый. Покажите, что площадь пересечения каких-то двух многоугольников хотя бы 1.

5. Эмиль, Эрнест и Эзра решили вместе 100 задач по математике. Каждый из них решил 60 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один человек, и легкой, если ее решили все трое. Насколько отличается количество трудных задач от количества легких?

6. Каждая сторона в треугольнике ABC разделена на 8 равных отрезков. Сколько существует различных треугольников с вершинами в точках деления (точки A, B и C не могут быть вершинами треугольников), у которых ни одна сторона не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC?

7. Докажите, что число чисел взамно простых с $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ и не больших n равно $n \cdot \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

8. Пусть $m < n$ — натуральные числа. Докажите, что $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k k^m C_n^k = 0$.