Транснеравенство

Даны два набора чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ и перестановка σ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Тогда:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \geqslant a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \ldots + a_nb_{\sigma(n)} \geqslant a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1.$$

Обратите внимание, что переменные могут быть и отрицательными.

1. **(a)** Докажите транснеравенство для $n = 2$;
(b) Докажите левую часть транснеравенства;
(c) Докажите правую часть транснеравенства.

2. Докажите, что для действительных чисел

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac.$$

3. Докажите, что

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant \frac{a+b+c}{abc}.$$

4. Для положительных чисел докажите неравенство:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant a + b + c.$$

5. **Неравенство Чебышёва**. Даны два набора чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$. Докажите, что

$$\frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n}$$

6. Докажите, что для положительных чисел верно:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leqslant \frac{3(ab+bc+ac)}{2(a+b+c)}$$

7. Докажите, что для положительных чисел выполняется

$$a^a b^b c^c \geqslant (abc)^{(a+b+c)/3}.$$