Метод штурма

— Ты невысокого мнения о пиратах?
А ведь сам без пяти минут пират!

Пираты Карибского моря

Основная его идея заключается в следующем: менять одновременно две переменные, сохраняя их сумму (или произведение) так, чтобы при этом одна из частей неравенства всегда изменялась в одну сторону. Обычно переменные либо пытаются сделать равными, либо наоборот – раздвинуть как можно дальше друг от друга.
Все рассматриваемые числа в задачах — положительные!

1. Вася взял числа a, b, а затем изменил их на числа x, y так, чтобы $a+b=x+y$, но при этом x и y были ближе, чем a и b: $a > x \geqslant y > b$. Как изменятся (увеличатся или уменьшатся) значения следующий выражений?

(a) ab;

(b) a^2+b^2;

(c) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$;

(d) a^3+b^3.

2. Докажите, что $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geqslant 2^n$, где $x_1\dots x_n = 1$.

3. Докажите неравенства о средних:

(a) $\dfrac{a_1+\dots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$;

(b) $\sqrt{\dfrac{a_1^2+\dots+a_n^2}{n}} \geqslant \dfrac{a_1+\dots+a_n}{n}$;

(c) $\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n} \geqslant \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}$.

4. Пусть сумма $x_1, x_2, \dots x_n$ равна 1. Докажите, что тогда

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}{x_1x_2\dots x_n} \geqslant (n-1)^n$$

5. **(a)** Пусть $x_1,\dots x_n \geqslant 1$ и $n>1$. Докажите, что:

$$\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n} \geqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}}$$

(b) Пусть $x_1,\dots x_n \leqslant 1$ и $n>1$. Докажите, что:

$$\frac{1}{1+x_1}+\dots+\frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}}$$

6. Докажите, что если $s=x_1+x_2+\dots+x_n$, $x_1x_2\dots x_n=1$, то

$$\frac{1}{1+s-x_1}+\frac{1}{1+s-x_2}+\dots+\frac{1}{1+s-x_n} \leqslant 1;$$