

Радикальная ось

–А ведь вы, кажется, радикал или что-то в этом духе? - воскликнул Сурков и посмотрел на архитектора подозрительно и с разочарованием.
– Я кличек не боюсь.

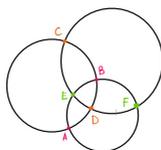
М. Горький, «Мужик»

Замечательный факт. Дано две окружности с разными центрами. Геометрическое место точек X , таких, степень точки X относительно первой окружности равна степени точки X относительно второй окружности — прямая Эта прямая называется **радикальной осью** этих двух окружностей.

Важное свойство. Радикальная ось перпендикулярна линии центров окружностей.

Замечательный факт. Дано три окружности, для каждой пары окружности рассмотрим радикальную ось. Тогда эти 3 радикальных оси либо совпадают, либо параллельны, либо пересекаются в одной точке.

1. (а) Две окружности пересекаются в точках A и B . Докажите, что AB — радикальная ось этих двух окружностей.
(б) Три окружности пересекаются так, как показано на рисунке. Покажите, что AB , CD и EF пересекаются в одной точке.



2. Даны две непересекающиеся окружности. К ним провели четыре их общие касательные. Докажите, что их середины лежат на одной прямой.
3. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом. Докажите, что их внутренние касательные пересекаются в одной точке.
4. Используя радикальные оси покажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.
5. На стороне AB прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^\circ$) выбрана точка C' . Точка B' — проекция C' на AC . BB' и CC' пересекаются в точке O . Докажите, что описанные окружности треугольников $BC'O$ и $OB'C$ вторично пересекаются на прямой AO .
6. Дана неравнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD . Окружность, проходящая через точки A и B пересекает боковые стороны трапеции в точках P , Q и диагонали в точках M , N . Покажите, что прямые PQ , MN , CD пересекаются в одной точке.
7. Дан такой выпуклый четырехугольник $ABCD$, что $AB = BC$ и $AD = DC$. Точки K , L , M — середины сторон AB , CD , AC соответственно. Перпендикуляр из точки A на BC и перпендикуляр из C на AD пересекаются в точке H . Покажите, что KL перпендикулярно HM .